

# Isodualité des réseaux euclidiens en petite dimension

Christophe BAVARD

11 novembre 2014

RÉSUMÉ. Nous proposons une classification algébrique et géométrique des réseaux euclidiens isoduaux de rang fixé. Premièrement, nous prouvons que ces réseaux se répartissent suivant un nombre fini de types algébriques. Deuxièmement, nous montrons qu'ils sont paramétrés par des espaces symétriques associés aux groupes classiques  $\mathbf{SO}_0(p, q)$ ,  $\mathbf{Sp}(2g, \mathbf{R})$  et  $\mathbf{SU}(p, q)$ , en nombre fini. Nous obtenons une description complète des types algébriques et des matrices de Gram des réseaux isoduaux jusqu'en rang 7. Nous discutons également la question de la densité maximale.

ABSTRACT. We propose an algebraic and a geometric classification of euclidean isodual lattices of fixed rank. First, we prove that these lattices are distributed according to a finite number of algebraic types. Second, we show that they are parametrized by a finite number of symmetric spaces associated to the classical groups  $\mathbf{SO}_0(p, q)$ ,  $\mathbf{Sp}(2g, \mathbf{R})$  and  $\mathbf{SU}(p, q)$ . We obtain a complete discription of algebraic types and Gram matrices of isodual lattices up to rank 7. The maximal density problem is also discussed.

## 1 Introduction et résultats principaux

Un réseau  $\Lambda$  d'un espace euclidien est *isodual* s'il est isométrique à son dual  $\Lambda^*$  (voir [CS94]). Tous les réseaux euclidiens de rang 1 ou 2 sont isoduaux, à homothétie près. En dimension 3, Conway et Sloane [CS94] décrivent les réseaux isoduaux et déterminent leur densité maximale; la description de [CS94] s'appuie sur un système de paramètres liés à la cellule de Voronoï, particulièrement bien adapté à la dimension 3 (voir [CS92]).

Parmi les réseaux isoduaux, on trouve les réseaux  $\Lambda$  engendrés par les bases symplectiques d'un espace hermitien positif ( $\Lambda$  et  $\Lambda^*$  sont alors isométriques par la structure complexe). Il s'agit des réseaux *symplectiques* ([BS94, Bav01]), famille importante comprenant les réseaux de périodes des surfaces de Riemann, ou jacobiniennes. Une autre classe intéressante de réseaux isoduaux est introduite dans [BM95] : les réseaux *orthogonaux* (voir ci-dessous). Bergé et Martinet [BM95] caractérisent à la Voronoï les maxima locaux de densité parmi les réseaux symplectiques ou orthogonaux; en dimension 4 ils étudient le lien entre l'isodualité et les configurations de vecteurs minimaux et classent les réseaux isoduaux de rang 4 ayant au moins 7 vecteurs minimaux.

Un premier objectif est ici de proposer une double classification des réseaux isoduaux : algébrique et géométrique. Pour cela, nous appellerons *réseau isodual* un couple  $(\Lambda, \sigma)$  où  $\Lambda$  est un réseau d'un espace euclidien  $E$  et  $\sigma$  est une isométrie de  $E$  telle que  $\sigma(\Lambda) = \Lambda^*$ . La donnée supplémentaire de l'isométrie  $\sigma$  permet de définir, comme dans [BM95], une forme bilinéaire sur  $E$  par

$$\alpha(u, v) = \langle u, \sigma(v) \rangle \quad (u, v \in E), \quad (1)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de  $E$ . Nous appellerons *type algébrique* de  $(\Lambda, \sigma)$  la classe d'isométrie du  $\mathbf{Z}$ -module bilinéaire régulier  $(\Lambda, \alpha|_{\Lambda \times \Lambda})$  (définition 2.1). La forme  $\alpha$  n'a pas de symétrie particulière *a priori*. Le cas symétrique correspond aux réseaux orthogonaux, le cas antisymétrique aux réseaux symplectiques. Cependant  $\alpha$  n'est pas arbitraire ; nous donnons une caractérisation algébrique des formes  $\alpha$  provenant des réseaux isoduaux (théorème 1.1, assertion (1)).

Pour aborder l'aspect géométrique, considérons l'ensemble  $P_n$  des matrices de Gram des réseaux euclidiens de rang  $n$  et de covolume 1. Rappelons que  $P_n$  est l'espace symétrique (riemannien) associé au groupe semi-simple  $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ , voir §4.1. Nous montrons que *les réseaux isoduaux de rang  $n$  partageant un type isodual fixé sont paramétrés par une sous-variété totalement géodésique de  $P_n$* . Plus précisément, si  $(\Lambda, \sigma)$  est muni d'une base, nous dirons que la matrice  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  de la forme  $\alpha$  *représente le type isodual de  $(\Lambda, \sigma)$* . Une vérification élémentaire montre alors que la matrice de Gram de  $\Lambda$  est localisée dans un sous-ensemble  $V_F$  de  $P_n$ , à savoir

$$V_F = \{A \in P_n; AF^\vee A = F\}, \quad (2)$$

où  $F^\vee = F'^{-1}$  ( $F'$  désigne la transposée de  $F$ ). Il se trouve que  $V_F$  est une sous-variété totalement géodésique de  $P_n$  (proposition 4.3). Nous définissons le *type géométrique* de  $(\Lambda, \sigma)$  comme l'orbite de  $V_F$  dans  $P_n$  sous l'action entière du groupe  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  (définition 2.1). Le point de départ de notre classification est le résultat suivant.

**Théorème 1.1.** (caractérisation algébrique et finitude des types).

- (1) Un élément  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  représente un type isodual si et seulement si  $FF^\vee$  est d'ordre fini.
- (2) L'ensemble des types algébriques isoduaux de rang fixé est fini.
- (3) L'ensemble des types géométriques isoduaux de rang fixé est fini.

L'assertion (1) donne une caractérisation purement algébrique des types isoduaux ; la condition nécessaire est évidente car  $FF^\vee$  représente  $\sigma^2$  qui est un automorphisme de  $\Lambda$ . L'assertion (2) contient la finitude des réseaux unimodulaires entiers de rang fixé, définis ou indéfinis (cas symétrique). On notera qu'à partir du rang 2, les classes d'isométries de  $\mathbf{Z}$ -modules bilinéaires réguliers ne sont pas en nombre fini, voir remarques 2.5. L'assertion (3) signifie qu'il existe une famille finie  $(V_i)$  de sous-variétés de  $P_n$  telle que tout réseau isodual de rang  $n$  admet une matrice de Gram appartenant à l'une des  $V_i$ .

Le deuxième objectif de l'article est d'obtenir des informations sur la densité maximale des réseaux isoduaux (voir plus bas), ce qui nécessite d'avoir une description suffisamment précise de ces réseaux. Des paramétrages explicites se déduisent du fait que les sous-variétés  $V_F$  définies par l'équation (2) sont des espaces symétriques d'un type bien particulier.

**Théorème 1.2** (structure et paramétrage des types géométriques). *Tout type géométrique isodual est (représenté par) un produit riemannien d’espaces symétriques associés aux groupes  $\mathbf{SO}(p, q)$ ,  $\mathbf{Sp}(2g, \mathbf{R})$  ou  $\mathbf{SU}(p, q)$ .*

La structure métrique des sous-variétés  $V_F$  (voir plus précisément §4.2) ne dépend que du *type algébrique réel*, notion introduite au §4.1 à partir de la propriété caractéristique (1) du théorème 1.1. Les espaces symétriques des groupes  $\mathbf{SO}(p, q)$ ,  $\mathbf{Sp}(2g, \mathbf{R})$  ou  $\mathbf{SU}(p, q)$  admettent comme modèles des ouverts d’espaces vectoriels, par exemple le demi-espace de Siegel pour  $\mathbf{Sp}(2g, \mathbf{R})$ . En explicitant le type algébrique réel de  $F$ , on en déduit facilement un paramétrage de  $V_F$  par un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ ,  $N$  étant la dimension de  $V_F$  (voir §4.3 pour les détails). Ainsi, *il est possible d’écrire explicitement les matrices de Gram de n’importe quelle famille de réseaux isoduaux dont le type algébrique est donné.*

Précisons quelques aspects algébriques. Nous définissons *l’ordre* d’un réseau isodual  $(\Lambda, \sigma)$  (ou de son type algébrique) comme l’ordre de  $\sigma^2$ . Selon une observation de Bergé et Martinet [BM95, p. 315], le couple  $(\Lambda, \sigma^m)$  est encore isodual pour tout  $m$  impair. Si l’on s’intéresse seulement au réseau  $\Lambda$  (par exemple à sa densité), on peut donc se restreindre aux types algébriques dont l’ordre est une puissance de 2, que nous appellerons *types principaux*. L’étape préliminaire à notre classification consiste à faire l’inventaire des éléments d’ordre fini de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ . Pour les cas traités ici ( $n$  petit, types principaux), il s’agit d’un simple exercice à partir de la théorie des représentations entières des groupes cycliques, voir §3.1. Ensuite, étant donné  $R \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  d’ordre fini, la détermination des  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  tels que  $FF^\vee = R$  – s’il en existe – s’appuie sur la connaissance des modules quadratiques (resp. hermitiens) sur  $\mathbf{Z}$  (resp. sur certains anneaux d’entiers), voir §2.5 et §§3.5-3.8 ; en particulier, la classification des formes quadratiques entières de petit déterminant est cruciale pour déterminer la « composante symétrique » des types algébriques (proposition 3.5). Il serait intéressant de caractériser les éléments  $R$  d’ordre fini de la forme  $R = FF^\vee$  avec  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ . Ce problème est discuté au §3.3 : nous y donnons des conditions nécessaires, mais la caractérisation reste ouverte.

Revenons maintenant à la question de la densité maximale. Soulevée dans [BS94] pour les réseaux symplectiques, elle se pose également pour les réseaux isoduaux en général. Soit  $\gamma_n^{\text{isod}}$  (resp.  $\mu_F$ ) le maximum de l’invariant d’Hermite sur les réseaux isoduaux (resp. sur  $V_F$ ). Il s’agit bien de maxima car les  $V_F$  vérifient un critère de compacité de Mahler (proposition 4.6) et  $\gamma_n^{\text{isod}}$  est le maximum des  $\mu_F$ , en nombre fini (théorème 1.1, (3)). Pour  $n \in \{1, 2, 4, 8, 24\}$ , on a  $\gamma_n^{\text{isod}} = \gamma_n$  (constante d’Hermite usuelle). Grâce à Conway et Sloane [CS94] on sait aussi que  $\gamma_3^{\text{isod}} = 1/2 + 1/\sqrt{2}$ . Ce maximum est réalisé par un réseau orthogonal lorentzien. La densité maximale du type orthogonal lorentzien est connue jusqu’en rang 12 d’après [Bav07]. Dans [BS94], Buser et Sarnak montrent que la densité maximale des réseaux symplectiques croît comme le rang, tandis que celle des jacobiennes croît comme le logarithme du rang.

Les dimensions  $n = 5, 6$  et  $7$  présentent un intérêt particulier car  $\gamma_n^{\text{isod}} < \gamma_n$ , les réseaux les plus denses n’étant pas isoduaux. Nous avons donc choisi de classer les types isoduaux jusqu’en dimension 7. La classification complète des types de rang  $n$  fixé est utile même si  $\gamma_n^{\text{isod}}$  est connue, et ce pour au moins deux raisons. D’abord, ces types interviennent dans les types décomposés des dimensions supérieures. Ensuite, la connaissance du type algébrique  $F$  donne une estimation plus précise de la densité *via*  $\mu_F$ . Pour ne pas allonger l’article,

nous nous limitons aux types principaux à partir de la dimension 5. Les classifications algébrique et géométrique des types non principaux pour  $5 \leq n \leq 7$  ainsi que la classification des types en dimension 8 peuvent être abordées par la même méthode.

La détermination de  $\gamma_n^{\text{isod}}$  nécessite une étude spécifique de chaque type géométrique (ou au moins des types maximaux, voir ci-dessous). Pour tous les types  $V_F$  classés ici, nous estimons  $\mu_F$  en exhibant *un maximum local de densité*; nous déterminons autant que possible la valeur de  $\mu_F$ , ce qui est relativement facile dans certains cas ( $V_F$  de dimension  $\leq 3$ , type décomposé), voir tables 8-11 et 13. Nous obtenons ainsi la valeur de  $\mu_F$  pour tous les types de rang  $\leq 4$  et pour tous les types principaux de rang 5 à l'exception du type orthogonal de signature  $(3, 2)$ , avec comme conséquence que  $\gamma_5^{\text{isod}} = \mu_{3,2}$  (corollaire 4.29). Les types géométriques sont naturellement ordonnés par l'inclusion. Par exemple toute sous-variété  $V_F$  est incluse dans une sous-variété  $V_G$  où  $G$  est un type algébrique principal. Nous donnons un critère d'inclusion (proposition 4.18) permettant d'ordonner les types géométriques (tables 8, 9, 10, 12 et 14). En particulier, nous pouvons décrire explicitement tous les types géométriques maximaux jusqu'en en dimension 7.

**Théorème 1.3** (matrices de Gram des réseaux isoduaux de rang  $\leq 7$ ). *Tout réseau euclidien isomorphe à son dual et de rang  $n \leq 7$  admet une matrice de Gram appartenant à l'une des sous-variétés de la table suivante.*

n	orthogonaux ou symplectique	autres indécomposables	décomposés	#
1	$\{I_1\}$			1
2	$\mathfrak{S}_1$			1
3	$V_{2,1}$		$\{I_1\}\mathfrak{S}_1$	2
4	$V_{3,1}, V_{2,2}, V_{2,2}^{\text{II}}, \mathfrak{S}_2$			4
5	$V_{4,1}, V_{3,2}$	$V_{I_1 F_4}$	$I_{2,1}\mathfrak{S}_1, \{I_1\}\mathfrak{S}_2$	5
6	$V_{5,1}, V_{4,2}, V_{3,3}, V_{3,3}^{\text{II}}, \mathfrak{S}_3$	$V_{I_2 F_4}, V_{I_{1,1} F_4}, V_{U_2 F_4}$	$V_{3,1}\mathfrak{S}_1, V_{2,2}\mathfrak{S}_1, V_{2,2}^{\text{II}}\mathfrak{S}_1$	11
7	$V_{6,1}, V_{5,2}, V_{4,3}$	$V_{I_3 F_4}, V_{I_{2,1} F_4}, V_{I_1 J_2 F_4}, V_{I_1 G_3 G_3^-}, V_{K_4 G_3}$	$V_{4,1}\mathfrak{S}_1, V_{3,2}\mathfrak{S}_1, V_{2,1}\mathfrak{S}_2, \{I_1\}\mathfrak{S}_3$	12

TABLE 1 – Types géométriques maximaux en dimension  $n \leq 7$

Les types orthogonaux ou symplectique sont toujours maximaux (sauf si  $\dim V_F \leq 1$ , voir proposition 4.19, (2)). Dans la table 1, les sous-variétés  $\mathfrak{S}_g$ ,  $V_{p,q}$ ,  $V_{2,2}^{\text{II}}$  et  $V_{3,3}^{\text{II}}$  sont données par les équations (35), (38), (50) et (61) respectivement. et les autres types indécomposables (deuxième colonne) sont explicités au A3 de l'annexe. Enfin, pour les types décomposés (définition 4.21) on pose  $VW = V \oplus W$ , sous-variété associée aux sommes orthogonales des réseaux des deux familles (voir proposition 4.2 pour sa structure métrique).

Il résulte du théorème 1.3 que tout réseau euclidien de rang 4 isomorphe à son dual admet une structure orthogonale ou symplectique. En rang 3, nous retrouvons les deux familles de [CS94].

## Contenu de l'article

<b>1</b>	<b>Introduction et résultats principaux</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Types associés aux réseaux isoduaux</b>	<b>6</b>
2.1	Type algébrique, type géométrique . . . . .	6
2.2	Caractérisation algébrique des types isoduaux . . . . .	6
2.3	Finitude des types isoduaux . . . . .	7
2.4	Types principaux. Types géométriques maximaux . . . . .	8
2.5	Méthode de classification . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Classification des types algébriques (<math>n \leq 7</math>)</b>	<b>9</b>
3.1	Éléments d'ordre finis de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ . . . . .	9
3.2	Opérations sur les types. Décompositions . . . . .	11
3.3	Sur l'existence de type associé à un élément de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ . . . . .	13
3.4	Commentaires et conventions préliminaires . . . . .	14
3.5	Types algébriques pour $n \leq 4$ . . . . .	15
3.6	Types algébriques principaux de rang 5 . . . . .	20
3.7	Types algébriques principaux de rang 6 . . . . .	22
3.8	Types algébriques principaux de rang 7 . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Classification des types géométriques (<math>n \leq 7</math>)</b>	<b>31</b>
4.1	Types réels. Aspects différentiels et métriques . . . . .	31
4.2	Composantes des types géométriques . . . . .	35
4.3	Paramétrage des types géométriques . . . . .	37
4.4	Automorphismes et inclusion . . . . .	40
4.5	Classification : méthode et notations . . . . .	41
4.6	Types géométriques de rang $n \leq 3$ . . . . .	43
4.7	Types géométriques de rang 4 . . . . .	44
4.8	Types géométriques principaux de rang 5 . . . . .	46
4.9	Types géométriques principaux de rang 6 . . . . .	51
4.10	Types géométriques principaux de rang 7 . . . . .	57
	<b>Annexe : données numériques</b>	<b>61</b>
A1	Éléments d'ordre fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ . . . . .	62
A2	Types algébriques indécomposables . . . . .	63
A3	Types géométriques maximaux indécomposables . . . . .	65
	<b>Bibliographie</b>	<b>66</b>

## 2 Types associés aux réseaux isoduaux

### 2.1 Type algébrique, type géométrique

Soit  $E$  un espace euclidien. Nous appellerons *réseau isodual* un couple  $(\Lambda, \sigma)$  où  $\Lambda$  est un réseau de  $E$  et  $\sigma$  est une isométrie de  $E$  telle que  $\sigma(\Lambda) = \Lambda^*$ . On a nécessairement  $\det \Lambda = 1$  et  $\sigma(\Lambda^*) = \Lambda$ . Deux réseaux isoduaux  $(\Lambda_i, \sigma_i)$  de  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont isométriques s'il existe une isométrie  $\varphi$  de  $E_1$  sur  $E_2$  telle que  $\varphi(\Lambda_1) = \Lambda_2$  et  $\varphi\sigma_1\varphi^{-1} = \sigma_2$ .

Soit  $(\Lambda, \sigma)$  un réseau isodual de  $E$ . Alors la forme bilinéaire

$$\alpha(u, v) = \langle u, \sigma(v) \rangle \quad (u, v \in E), \quad (3)$$

est par définition entière en restriction à  $\Lambda \times \Lambda$ . Étant donnée une base  $\mathcal{B}$  de  $\Lambda$ , notons  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  la matrice de  $\alpha$  dans  $\mathcal{B}$  ( $n = \dim E$ ) et  $B$  la matrice de Gram de  $\mathcal{B}$ ; il est facile de voir que  $F$  et  $B$  sont liées par la relation  $BF^\vee B = F$ . De plus, les classes d'équivalence entière de  $F$  et de  $B$  sont indépendantes du choix de  $\mathcal{B}$ . Rappelons que le groupe  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  agit par équivalence sur les matrices carrées  $M$  par  $T \cdot M = TMT'(T \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}))$ , et qu'il agit en particulier sur l'espace  $P_n$  des matrices de Gram de déterminant 1. Posons, comme dans l'introduction,  $F^\vee = F'^{-1}$  et

$$V_F = \{A \in P_n; AF^\vee A = F\}.$$

**Définition 2.1.** Soit  $(\Lambda, \sigma)$  un réseau isodual de rang  $n$  et soit  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  comme ci-dessus. Nous appellerons

- (1) *type algébrique* de  $(\Lambda, \sigma)$  la classe d'équivalence entière de  $F$ , notée  $[F]$ , c'est-à-dire la classe d'isométrie du  $\mathbf{Z}$ -module bilinéaire  $(\Lambda, \alpha|_{\Lambda \times \Lambda})$ ,
- (2) *type géométrique* de  $(\Lambda, \sigma)$  la classe d'équivalence entière de  $V_F$  dans l'espace  $P_n$  des matrices de Gram.

Le type algébrique est clairement invariant par isométrie de réseaux isoduaux. Il en est de même du type géométrique puisque  $V_{T \cdot F} = T \cdot V_F$  pour  $T \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ .

L'ensemble  $P_n$  des matrices de Gram a une structure géométrique très riche : il s'agit d'un espace symétrique riemannien (voir les détails au §4.1). Les sous-variétés connexes, complètes et totalement géodésique de  $P_n$  sont automatiquement simplement connexes et symétriques ; pour abréger, nous les appellerons « *sous-espaces symétriques* ». Dans ce contexte, on sait (proposition 4.3) que les sous-ensembles  $V_F$  sont des sous-espaces symétriques de  $P_n$ . L'action par équivalence de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  sur  $P_n$  étant isométrique (voir §4.1), la structure métrique – riemannienne – de  $V_F$  est un invariant du type algébrique et du type géométrique.

### 2.2 Caractérisation algébrique des types isoduaux

On peut se demander à quelle condition une matrice donnée  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  représente un type algébrique de réseau isodual, ou « *type algébrique isodual* ». Un premier critère évident est la non vacuité de  $V_F$  : si  $A = PP' \in V_F$  ( $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ ), alors dans l'espace euclidien usuel le réseau  $(P'\mathbf{Z}^n, P^{-1}FP^\vee)$  est isodual de type  $[F]$  (voir §2.1). Voici maintenant un critère purement algébrique.

**Proposition 2.2.** (caractérisation algébrique des types algébriques isoduaux)  
*Un élément  $F$  du groupe  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  représente un type algébrique isodual si et seulement si  $FF^\vee$  est d'ordre fini.*

*Preuve.* Supposons que  $F$  représente un type algébrique isodual. Si  $A \in V_F$ , on a alors  $FF^\vee A (FF^\vee)^\vee = A$  (traduction de  $\sigma^2 \in \text{Aut } \Lambda$  pour  $(\Lambda, \sigma)$  isodual) et la matrice  $FF^\vee$  est d'ordre fini par compacité du stabilisateur  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})_A$ . Réciproquement, posons  $\pi_F = \begin{pmatrix} 0 & F \\ F^\vee & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_n = \cup_{\lambda > 0} \lambda P_n$  et considérons

$$W_n = \{\tau_A; A \in C_n\}, \quad \text{où} \quad \tau_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

L'action de  $\pi_F$  sur  $P_{2n}$  laisse stable  $W_n$ ; de plus  $A \in V_F$  si et seulement si  $\tau_A$  est fixe par  $\pi_F$  (noter que la relation  $AF^\vee A = F$  entraîne  $\det A = 1$ ). On vérifie (voir §2.3, preuve du théorème 2.3) que  $W_n$  est un sous-espace symétrique de  $P_{2n}$ . Si  $FF^\vee$  est d'ordre fini,  $\pi_F$  l'est aussi et on conclut grâce au théorème de point fixe d'Élie Cartan que  $V_F$  est non vide.

### 2.3 Finitude des types isoduaux

**Théorème 2.3.** *L'ensemble des types algébriques (resp. géométriques) isoduaux de rang fixé est fini.*

*Preuve.* Nous utilisons les propriétés topologiques de certains sous-groupes de  $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbf{R})$  combinées avec celles des réseaux symplectiques semi-eutactiques établies dans [Bav05]. Soit  $\mathfrak{S}_n$  le sous-espace symétrique de  $P_{2n}$  formé par les matrices de Gram des réseaux symplectiques. Noter que  $\mathfrak{S}_n$  est stable par l'action de  $\Omega = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ , par conséquent le lieu des points fixes  $W_n = \mathfrak{S}_n^\Omega$  est un sous-espace symétrique de  $\mathfrak{S}_n$ . Posons  $H(\mathbf{R}) = \{\delta_P; P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})\}$  où  $\delta_P = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P^\vee \end{pmatrix}$ ,  $G(\mathbf{R}) = H(\mathbf{R}) \cup \{\pi_F; F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})\}$ , et considérons le groupe

$$G(\mathbf{Z}) = G(\mathbf{R}) \cap \mathbf{SL}_{2n}(\mathbf{Z}) = \{\delta_P; P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})\} \cup \{\pi_F; F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})\}. \quad (5)$$

L'équivalence entière entre deux matrices  $F$  et  $G$  de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  équivaut clairement à l'existence d'un élément  $\delta_P$  ( $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ ) qui conjugue  $\pi_F$  et  $\pi_G$ . La finitude des types isoduaux algébriques (et par suite celle des types géométriques) résulte donc de la propriété suivante.

**Affirmation 2.4.** *Les sous-groupes finis de  $G(\mathbf{Z})$  sont en nombre fini modulo conjugaison par  $H(\mathbf{Z}) = H(\mathbf{R}) \cap \mathbf{SL}_{2n}(\mathbf{Z})$ .*

Le groupe  $G(\mathbf{Z})$  agit sur  $W_n$ . Si  $\Pi$  est un sous-groupe fini de  $G(\mathbf{Z})$ , le lieu des points fixes  $W_n^\Pi$  est non vide par le théorème du point fixe d'É. Cartan (loc. cit.). Nous allons montrer l'existence d'un compact  $K$  de  $W_n$  tel que pour tout sous-groupe fini  $\Pi$  de  $G(\mathbf{Z})$ , l'un des translatés  $\gamma \cdot W_n^\Pi$  ( $\gamma \in H(\mathbf{Z})$ ) coupe  $K$ . Le conjugué  $\gamma \Pi \gamma^{-1}$  sera alors inclus dans  $\{\alpha \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbf{Z}); \alpha(K) \cap K \neq \emptyset\}$ , ensemble fini puisque l'action de  $\mathbf{GL}_{2n}(\mathbf{Z})$  sur  $P_{2n}$  est propre et discontinue.

Observons d'abord que  $H(\mathbf{R})$  est « pseudo-algébrique » au sens de [Bav05, définition 2.1]. En effet, soit  $M_{2n}(\mathbf{C})$  l'espace des matrices carrées complexes d'ordre  $2n$ , soit  $\varphi : \mathbf{SL}_{2n}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{GL}(M_{2n}(\mathbf{C})^2)$  définie par

$$\varphi(M) \cdot (X, Y) = (MXM', MYM^{-1}),$$



et soit  $v = ((-\frac{0}{I_n} \ I_n), \Omega)$ ; alors  $\varphi(\mathbf{SL}_{2n}(\mathbf{Z}))$  laisse stable le réseau  $M_{2n}(\mathbf{Z})^2$  et  $H(\mathbf{R}) = \{M \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbf{R}); \varphi(M).v = v\}$ . En outre  $H(\mathbf{R})$  contient toutes les transvections du sous-espace symétrique  $W_n$ . Par suite, si  $G^\Pi(\mathbf{Z})$  désigne le commutant de  $\Pi$  dans  $G(\mathbf{Z}) \cap \mathbf{SL}_{2n}(\mathbf{Z})$ , l'application

$$G^\Pi(\mathbf{Z}) \backslash W_n^\Pi \rightarrow \mathbf{SL}_{2n}(\mathbf{Z}) \backslash P_{2n} \quad (6)$$

est propre d'après [Bav05, proposition 2.7, 3)]. Soit  $\mu$  l'invariant d'Hermite défini sur  $P_{2n}$ . Par le théorème de compacité de Mahler, la restriction de  $\mu$  à  $W_n^\Pi$  admet donc un maximum en  $A \in W_n^\Pi$ . Un tel point  $A$  est nécessairement semi-eutactique relativement à  $W_n^\Pi$ , [Bav97, proposition 2.1 (2)], et aussi relativement à  $\mathfrak{S}_n$  ([Bav05, §2.5, lemme 2.8]) puisque  $W_n^\Pi$  est le lieu des points de  $\mathfrak{S}_n$  fixes par  $\Pi$  et  $\Omega$ . Par suite ([Bav05, §2.6, théorème 1, 1), cas symplectique]) on a  $\mu(A) \geq 1$ . Pour conclure il suffit de remarquer que  $H(\mathbf{Z}) \backslash W_n \rightarrow \mathbf{SL}_{2n}(\mathbf{Z}) \backslash P_{2n}$  est propre (application (6) pour  $\Pi$  trivial) et de prendre  $K$  compact tel que  $\{A \in W_n; \mu(A) \geq 1\} = \cup_{\gamma \in H(\mathbf{Z})} \gamma \cdot K$ .

*Remarques 2.5.* (1) Le théorème 2.3 contient en particulier la finitude des réseaux entiers unimodulaires de rang fixé, positifs ou indéfinis.

(2) L'affirmation 2.4 contient la finitude des sous-groupes finis de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  modulo conjugaison.

(3) Les classes d'équivalence entières ne sont pas en nombre fini. Par exemple, pour  $a \in \mathbf{N}$ , les matrices  $F_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont deux à deux non équivalentes car les polynômes caractéristiques de  $F_a F_a^\vee$  sont distincts (cf. §2.2).

## 2.4 Types principaux. Types géométriques maximaux

Si  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ , la classe de conjugaison de  $FF^\vee$  dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  est un invariant de  $[F]$ . Supposons maintenant que  $[F]$  soit un type isodual; l'ordre de  $FF^\vee$  sera appelé *ordre* de  $[F]$ . Pour tout  $\ell \in \mathbf{N}$ , la matrice  $G = F(F^\vee F)^\ell$  représente un type isodual car  $GG^\vee = (FF^\vee)^{2\ell+1}$ . De plus  $V_F$  est inclus dans  $V_G$  (en termes de réseaux, si  $(\Lambda, \sigma)$  est isodual, alors  $(\Lambda, \sigma^{2\ell+1})$  l'est aussi).

**Définition 2.6.** Un type algébrique isodual est dit *principal* si son ordre est une puissance de 2.

Par extension nous appellerons aussi *principal* tout type géométrique  $V_F$  associé à un type algébrique principal  $[F]$ . Noter que l'on peut avoir  $V_F = V_G$  avec  $[G]$  non principal (exemple :  $F = I_3$ ,  $G = F_3$ , cf. 4.6); en particulier l'ordre d'un type géométrique n'est pas bien défini.

L'inclusion entre parties de  $P_n$  induit un ordre partiel (encore appelé inclusion) sur l'ensemble des types géométriques. D'après ce qui précède, tout type géométrique isodual est inclus dans un type géométrique principal. Les *types géométriques maximaux* pour l'inclusion sont donc principaux.

*Exemple 2.7.* Le type symplectique et les types orthogonaux indéfinis (à l'exception de la signature  $(1, 1)$ ) sont toujours maximaux (proposition 4.19, (2)).

Pour la recherche de la densité maximale des réseaux isoduaux, il suffira donc de ne considérer que les types géométriques principaux et on pourra évidemment se restreindre aux types maximaux.



## 2.5 Méthode de classification

Nous décrivons ici, dans les grandes lignes, les deux étapes (algébrique puis géométrique) de la classification. La dimension  $n$  étant fixée, nous déterminons d'abord les types isoduaux algébriques en partant d'un système fini  $\mathcal{F}_n$  de représentants des classes de conjugaison dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  des éléments d'ordre fini de  $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$  (tables 15 et 16 de l'annexe). Tout type isodual est représenté par un élément  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  tel que  $FF^\vee \in \mathcal{F}_n$ . Pour chaque  $R \in \mathcal{F}_n$ , posons  $\mathcal{T}_R = \{F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}); FF^\vee = R\}$ , et observons que  $\mathcal{T}_R$  est aussi l'ensemble des solutions  $F$  entières et de déterminant  $\pm 1$  de l'équation *linéaire*  $F=RF'$ . Fréquemment les solutions entières de cette équation ont un déterminant divisible par un entier  $\geq 2$ , auquel cas  $\mathcal{T}_R$  est vide (voir des exemples au §3.5).

Il est clair que le commutant  $C_R$  de  $R$  dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  opère dans  $\mathcal{T}_R$ . De plus deux matrices de  $\mathcal{T}_R$  ne peuvent être équivalentes que par un élément de  $C_R$ . Par conséquent l'action de  $C_R$  sur  $\mathcal{T}_R$  n'a qu'un nombre fini d'orbites (théorème 2.3) et les types associés sont tous distincts. Pour  $(P, F) \in C_R \times \mathcal{T}_R$ , les coefficients de la matrice  $P \cdot F$  sont des formes quadratiques entières en les coefficients de  $P$ . La description complète des orbites de  $C_R$  dans  $\mathcal{T}_R$  repose sur la possibilité de réaliser de « petites valeurs » de ces formes par des éléments  $P \in C_R$ ; cette étape est détaillée au §3.4. Pour chaque dimension étudiée, nous donnerons un ensemble fini de représentants ainsi qu'une liste finie d'invariants qui caractérisent les types (voir §§3.5-3.8).

Il existe une action du groupe  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$  sur les types algébriques isoduaux; en effet si  $F$  représente un type algébrique, alors  $F'$  et  $-F$  aussi (noter que  $[F^\vee] = [F]$  et  $[F^{-1}] = [F']$ ). Concernant les types géométriques associés, on a

$$V_{F'} = V_{-F} = V_F. \quad (7)$$

Pour classer les types géométriques, nous commencerons par déterminer les sous-variétés  $V_F$  associées à un système de représentants des types algébriques préalablement réduit par l'action de  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ . Cette étape est facilitée par les propriétés de décomposition (3.4 et 4.9), y compris par la notion de « type réel » (définition 4.1) car de nombreux types algébriques sont indécomposables sur  $\mathbf{Z}$  mais se scindent sur  $\mathbf{R}$ . Les sous-variétés  $V_F$  sont ensuite comparées grâce au critère d'inclusion (proposition 4.18) :  $V_F$  est incluse dans  $V_G$  si et seulement si  $FG^\vee$  fixe  $V_F$  point par point. Nous pouvons ainsi décrire l'ensemble ordonné des types géométriques et en déduire les types maximaux.

Rappelons que, pour les raisons invoquées dans l'introduction, nous ne classons à partir du rang 5 que les types principaux.

## 3 Classification des types algébriques ( $n \leq 7$ )

### 3.1 Éléments d'ordre finis de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$

Les éléments d'ordre fini de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  pour  $n$  petit peuvent s'obtenir à partir de la théorie des représentations entières des groupes cycliques. Quand l'ordre est premier, celles-ci sont décrites dans le chapitre 34 de [CR81]. Je remercie Gabriele Nebe qui m'a signalé cette référence.

On s'intéresse ici aux éléments  $u \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  d'ordre fini  $d$  pour  $n \leq 4$  et d'ordre  $2^k$  pour  $5 \leq n \leq 7$ . Si  $d = p^\alpha$  avec  $p$  premier et  $\alpha \in \mathbf{N}^*$ , alors  $u$  doit annuler le polynôme cyclotomique  $\Phi_{p^\alpha}$  et l'on a  $p^{\alpha-1}(p-1) \leq n$ . De là (et avec des arguments analogues), on déduit aisément que les valeurs possibles de  $d$  sont  $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  pour  $n = 2, 3$  et  $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$  pour  $n = 4$  (voir [Vai28] pour le cas général).

Soit maintenant  $p$  un entier premier, soit  $\epsilon_p$  une racine primitive  $p$ -ième de l'unité dans  $\mathbf{C}$  et soit  $\Pi_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ . Il y a bijection entre les classes de conjugaison des éléments d'ordre  $p$  de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  et les structures de  $\mathbf{Z}[\Pi_p]$ -module non triviales sur  $\mathbf{Z}^n$  à isomorphisme près. On sait (cf. [CR81, p. 729]) qu'un tel module  $M$  est isomorphe à une somme d'indécomposables de trois types : trivial ( $\mathbf{Z}$ ), idéal fractionnaire du corps cyclotomique  $\mathbf{Q}[\epsilon_p]$  ou extension d'un tel idéal ; en outre le nombre de composantes de chaque type et le produit des idéaux dans le groupe des classes caractérisent  $M$  à isomorphisme près. Supposons de plus que le groupe des classes est trivial, ce qui est le cas pour  $p \in \{2, 3, 5\}$  (cf. [Was97]). Les seuls indécomposables à isomorphisme près sont alors  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}[\epsilon_p]$  et  $\mathbf{Z}[\Pi_p]$  (extension de  $\mathbf{Z}[\epsilon_p]$  via le morphisme d'augmentation) et  $M$  est caractérisé par les multiplicités de ces trois types. Les éléments d'ordre  $p \in \{2, 3, 5\}$  sont explicités dans les tables 15 et 16 de l'annexe ( $R_p$  et  $V_{p-1}$  correspondent respectivement à  $\mathbf{Z}[\Pi_p]$  et  $\mathbf{Z}[\epsilon_p]$ ). En particulier, il y a  $[n^2/4] + n$  classes d'éléments d'ordre 2 dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ .

Une autre situation agréable se présente quand le polynôme minimal de  $u \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  d'ordre  $d \geq 2$  est le polynôme cyclotomique  $\Phi_d$ . C'est le cas pour  $(n, d) = (1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (4, 5), (4, 8), (4, 10)$  et pour  $(n, d) = (4, 12)$  si  $u^6 + I_4 = 0$ . Alors  $\mathbf{Z}^n$  est un module sur  $Z[\epsilon_d] = \mathbf{Z}[X]/(\Phi_d)$ , sans torsion (appliquer Bézout dans  $\mathbf{Q}[X]$ ), donc isomorphe à une somme d'idéaux fractionnaires de  $\mathbf{Q}[\epsilon_d]$  ([CR81, théorème 4.13 p. 85]). Pour les valeurs de  $(n, d)$  ci-dessus, le groupe des classes d'idéaux est trivial ([Was97]) et  $\mathbf{Z}^n$  est isomorphe à  $Z[\epsilon_d]$  comme  $Z[\epsilon_d]$ -module.

Le cas  $n = 2$  résulte entièrement de ce qui précède. Nous explicitons ensuite les  $u \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  d'ordre  $d$  non premier par des considérations élémentaires en procédant suivant les valeurs croissantes de  $n \geq 3$ . Observons d'abord que pour tout  $P \in \mathbf{Z}[X]$ , le noyau  $L$  de  $P(u)$  est un facteur direct de  $\mathbf{Z}^n$  stable par  $u$ . Quand  $L$  est non trivial,  $\mathbf{Z}^n$  apparaît comme une extension de  $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}]$ -modules de rang sur  $\mathbf{Z}$  plus petit que  $n$ . Les ordres  $d$  considérés ici sont tous pairs et nous prendrons généralement  $P(X) = X^{d/2} - 1$  pour utiliser les involutions. On peut supposer que  $u = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$ . Comme  $u^{d/2}$  est une involution, le rang  $k$  de  $L$  est égal à la multiplicité de la valeur propre 1 dans le polynôme caractéristique de  $u^{d/2}$ . Par suite  $B^{d/2} + I_{n-k} = 0$ . Le cas éventuel où  $u^{d/2} + I_n = 0$  ( $k = 0$ ) se traite séparément ; par exemple, si  $d = 4$  on a un  $Z[\epsilon_4]$ -module (voir plus haut), si  $(n, d) = (3, 6)$  alors  $-u$  est d'ordre 3, ... Quand  $L$  est non trivial, les matrices  $A$  et  $B$  sont supposées connues à conjugaison près puisque  $A^{d/2} = I_k$  et  $B^{d/2} = -I_{n-k}$  (éléments d'ordre fini et de rang au plus  $n-1$ ). Dans la suite on fixe  $A$  et  $B$ . Soient  $C_A$  et  $C_B$  leurs commutants respectifs dans  $\mathbf{GL}_k(\mathbf{Z})$  et  $\mathbf{GL}_{n-k}(\mathbf{Z})$  et soit  $T \in M_{k, n-k}(\mathbf{Z})$ . On a les relations

$$\begin{pmatrix} I_k & T \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & T \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & X + TB - AT \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (8)$$

et pour  $(P, Q) \in C_A \times C_B$

$$\begin{pmatrix} P & T \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & T \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & PXQ^{-1} \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (9)$$

On voit que l'ensemble  $M_{A,B} = \{TB - AT; T \in M_{k,n-k}(\mathbf{Z})\}$  est un sous-module d'indice fini du  $\mathbf{Z}$ -module  $M_{k,n-k}(\mathbf{Z})$ . En effet, si  $TB - AT = 0$ , on a  $TB^j = A^jT$  pour tout  $j \in \mathbf{N}$ , d'où  $T = 0$  ( $j = d/2$ ). Par 8 on peut donc ramener  $X$  dans une liste finie de représentants modulo  $M_{A,B}$ . Cette liste peut éventuellement être encore réduite grâce à l'action des commutants de  $A$  et de  $B$ , relation 9. Enfin il faut discerner les classes de conjugaison. On distinguera toujours deux éléments  $u_1$  et  $u_2$  (ayant le même polynôme caractéristique) en explicitant les solutions entières  $w$  de l'équation linéaire  $wu_1 - u_2w = 0$ , puis en vérifiant que le déterminant d'une telle solution est divisible par un entier distinct de  $\pm 1$ . Tous les résultats sont rassemblés dans les tables 15 et 16 de l'annexe.

Détaillons un exemple pour illustrer la méthode :  $(n, d) = (6, 8)$ . Les notations sont définies dans l'appendice. Le polynôme minimal de la matrice  $B$  est ici  $\Phi_8$ , donc  $B$  correspond à un  $\mathbf{Z}[\epsilon_8]$ -module et nécessairement  $\ker(u^4 - I_6)$  est de rang  $k = 2$ . On peut donc prendre  $B = X_4$  et  $A \in \{I_2, -I_2, I_{1,1}, R_2, J_2\}$ . Dans tous les cas,  $M_{A,B}$  est d'indice 4 dans  $M_{2,4}(\mathbf{Z})$ . Après réduction supplémentaire par 9, on se ramène à  $u \in \{I_2X_4, I_1X_5\}$  si  $A = I_2$ ,  $u \in \{I_2^-X_4, I_1^-X_5\}$  si  $A = -I_2$ ,  $u \in \{I_{1,1}X_4, I_1X_5^-, I_1^-X_5, Z_6\}$  si  $A = I_{1,1}$ ,  $u \in \{R_2X_4, Z_6', Z_6''\}$  si  $A = R_2$  et  $u \in \{J_2X_4, X_6, Y_6\}$  si  $A = J_2$ . On vérifie enfin que cette liste de 14 éléments ne contient pas de paire d'éléments conjugués en triant suivant le polynôme caractéristique, puis à l'aide d'un calcul modulo 2.

Certains cas se règlent plus directement grâce à des propriétés spécifiques. Par exemple si  $(n, d) = (4, 12)$ , le polynôme minimal  $\mu$  de  $u$  vaut  $\Phi_{12}$  (traité plus haut),  $\Phi_3\Phi_4$  ou  $\Phi_4\Phi_6$ . Dans ces deux derniers cas on a  $\mu = PQ$  où  $(P, Q) \in \mathbf{Z}[X]^2$  vérifie une relation de Bézout dans  $\mathbf{Z}[X]$ , à savoir  $\Phi_3\Phi_6 - X^2\Phi_4 = 1$ . Donc  $\mathbf{Z}^4 = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$  se scinde comme  $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}]$ -module.

*Remarque 3.1.* Les éléments d'ordre 4 peuvent également se déduire des 9 représentations entières indécomposables de  $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$  (cf. [Roi60], [CR81, ch. 34]).

## 3.2 Opérations sur les types. Décompositions

Soient  $A = (a_{i,j}) \in M_m(\mathbf{Z})$  et  $B \in M_n(\mathbf{Z})$  deux matrices carrées. On note  $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  la *somme directe* et  $A \otimes B = (a_{i,j}B)$  (matrice formée de  $m^2$  blocs) le *produit tensoriel*. Ces deux opérations sont associatives et commutent avec la multiplication matricielle et la transposition; elles sont commutatives à équivalence près. Par conséquent, si  $F$  et  $G$  représentent des types isoduaux, il en est de même pour  $F \oplus G$  et  $F \otimes G$ . De plus, ces opérations induisent deux structures de monoïdes commutatifs sur l'ensemble  $\mathcal{T}(\mathbf{Z})$  des types isoduaux.

*Remarque 3.2.* On pourrait enrichir ces structures comme dans la théorie des formes bilinéaires symétriques, mais nous n'utiliserons pas ce fait ici. En effet le groupe de Grothendieck de  $(\mathcal{T}(\mathbf{Z}), \oplus)$  est muni d'une structure d'anneau unitaire commutatif grâce au produit tensoriel. Notons  $\hat{T}(\mathbf{Z})$  cet « anneau des types isoduaux ». Noter que  $\mathcal{T}(\mathbf{Z})$  ne s'injecte pas dans  $\hat{T}(\mathbf{Z})$  (la forme paire  $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est stablement équivalente à la forme impaire  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ). Par ailleurs, on vérifie aisément que l'anneau de Grothendieck-Witt de  $\mathbf{Z}$  s'injecte dans  $\hat{T}(\mathbf{Z})$  et de même que l'anneau de Witt de  $\mathbf{Z}$  s'injecte dans  $\hat{T}(\mathbf{Z})/U_2\hat{T}(\mathbf{Z})$ .

Si  $[F]$  est un type isodual, la matrice  $F$  définit une forme bilinéaire sur  $\mathbf{Z}^{n*}$  et on a la notion d'orthogonalité associée, en général non symétrique. Le résultat suivant est très utile pour les questions de décomposition.

**Lemme 3.3.** (lemme d'orthogonalité bilatère) *Soit  $F$  un élément de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  et soit  $R = FF^\vee$ . Soit  $(P, Q) \in \mathbf{Z}[X]^2$ . On pose  $P^*(X) = X^{\deg(P)}P(1/X)$  (polynôme réciproque de  $P$ ) et on suppose que  $P^*$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbf{Q}[X]$ . Alors les sous-modules  $\ker P(R^\vee)$  et  $\ker Q(R^\vee)$  sont bilatéralement  $F$ -orthogonaux.*

*Preuve.* Noter d'abord que  $FR^{\vee m} = R^m F$  pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ . Soit  $x \in \ker P(R^\vee)$  et soit  $y \in \ker Q(R^\vee)$ . Par hypothèse, il existe  $(A, B) \in \mathbf{Q}[X]^2$  tel que  $AP^* + BQ = 1$ . On a donc  $y = A(R^\vee)P^*(R^\vee)y$ . Par suite, on a  $x'Fy = x'P^*(R)A(R)Fy$ . Mais  $P^*(R') = R'^{\deg(P)}P(R^\vee)$ , d'où  $x'P^*(R) = 0$  et  $x'Fy = 0$ . Comme  $Q^*$  et  $P$  sont premiers entre eux, on a aussi  $y'Fx = 0$  par le même raisonnement.

**Proposition 3.4.** *Soit  $R = R_1 \oplus R_2 \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  un élément d'ordre fini et soit  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  tel que  $FF^\vee = R$ . On suppose que les polynômes caractéristiques  $\chi_{R_1}$  et  $\chi_{R_2^\vee}$  ( $= \chi_{R_2}$ <sup>1</sup>) sont premiers entre eux dans  $\mathbf{Q}[X]$ . Alors*

- a)  *$F$  se scinde en  $F = F_1 \oplus F_2$  avec  $F_j F_j^\vee = R_j$  ( $j = 1, 2$ ),*
- b) *on a  $V_F = \{A_1 \oplus A_2; (A_1, A_2) \in V_{F_1} \times V_{F_2}\}$ ,*
- c) *le groupe d'isométries de  $F$  est isomorphe au produit des groupes d'isométries respectifs de  $F_1$  et  $F_2$ .*

*Preuve.* Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les représentations complexes définies par  $R_1$  et  $R_2$ . L'hypothèse sur les polynômes caractéristiques revient à dire que  $\rho_1$  et  $\rho_2^\vee$  n'ont pas de type irréductible en commun (ce qui équivaut aussi à l'orthogonalité de leurs caractères). Par conséquent la seule matrice complexe  $M$  vérifiant  $R_1 M = M R_2^\vee$  est  $M = 0$ . De plus, comme  $R_2$  est réelle, on a  $\chi_{R_2^\vee} = \chi_{R_2}$  et la même propriété est vraie si on remplace  $R_2^\vee$  par  $R_2$ . En décomposant  $F$  en 4 blocs et en explicitant  $F = RF'$ , on voit d'après ce qui précède les blocs non diagonaux sont nuls. La matrice  $F$  est alors diagonale par blocs, ce qui prouve a). Cette assertion résulte aussi du lemme d'orthogonalité bilatère 3.3. Soit maintenant  $A \in V_F$ . On a  $RAR' = A$  et l'on voit de même que  $A$  est diagonale par blocs, d'où l'assertion b). Enfin toute matrice  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  telle que  $P'FP = F$  (isométrie de  $F$ ) doit commuter avec  $R'$ ; on trouve à nouveau que  $P$  est diagonale par blocs, ce qui établit l'assertion c).

**Proposition 3.5.** (décomposition canonique d'un type isodual)

*Soit  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  tel que  $R = FF^\vee$  soit d'ordre fini  $d$ . Pour tout diviseur  $k$  de  $d$  on pose  $M_k = \ker \Phi_k(R^\vee)$  où  $\Phi_k$  est le  $k$ -ième polynôme cyclotomique. Alors*

- a) *la somme des  $M_k$  est directe et d'indice fini dans  $\mathbf{Z}^n$ ,*
- b) *cette somme directe  $\bigoplus_{k|d} M_k$  est  $F$ -orthogonale bilatère,*
- c) *l'indice  $[\mathbf{Z}^n : \bigoplus_{k|d} M_k]$  et les classes d'équivalence des  $\mathbf{Z}$ -modules bilinéaires  $(M_k, F)$  sont des invariants du type  $[F]$ .*

*Preuve.* On étend l'action de  $R^\vee$  à  $\mathbf{Q}^n$ . Le polynôme minimal de  $R^\vee$  est le produit de certains  $\Phi_k$  ( $k|d$ ), tous irréductibles sur  $\mathbf{Q}$ . L'espace vectoriel  $\mathbf{Q}^n$  est donc la somme directe des noyaux correspondants, d'où a). L'assertion b) résulte du lemme 3.3 puisque  $\Phi_1^* = -\Phi_1$  et  $\Phi_k^* = \Phi_k$  pour  $k \geq 2$ . Soit maintenant

1.  $R_2$  est conjugué sur  $\mathbf{R}$  à un élément de  $\mathbf{O}(n)$

$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ ; on pose  $G = PFP'$  et  $S = GG^\vee$ . On a  $S^\vee = P^\vee R^\vee P'$ . Il est clair que  $P^\vee : (\mathbf{Z}^n, F) \rightarrow (\mathbf{Z}^n, G)$  est une isométrie qui envoie  $\ker \Phi_k(R^\vee)$  sur  $\ker \Phi_k(S^\vee)$  pour tout diviseur  $k$  de  $d$ , ce qui prouve l'assertion c).

Le résultat suivant permet d'obtenir des types scindés à partir de certains éléments  $R \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  décomposés ne vérifiant pas l'hypothèse de la proposition 3.4 (voir par exemple au 3.5 les cas  $I_1 \oplus R_3$  ou  $W_2 \oplus W_2$ ).

**Lemme 3.6.** (lemme de scindement) *Soit  $R \oplus S \in \mathbf{GL}_{k+l}(\mathbf{Z})$  et soit  $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{k+l}(\mathbf{Z})$  une solution de  $FF^\vee = R \oplus S$ . On suppose que  $A \in \mathbf{GL}_k(\mathbf{Z})$ . Alors  $F$  est équivalente à une matrice décomposée  $G = A \oplus M$  ( $M \in \mathbf{GL}_l(\mathbf{Z})$ ) telle que  $GG^\vee = R \oplus S$ .*

*Preuve.* L'hypothèse sur  $F$  implique (entre autres) les relations  $A = RA'$ ,  $B = RC'$  et  $SC = CR^\vee$ . Par suite, si on pose  $U = -CA^{-1}$ , on a  $SU = UR$  et la matrice triangulaire  $T = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ U & I_l \end{pmatrix}$  commute avec  $R \oplus S$ . Alors  $G = TFT'$  convient.

### 3.3 Sur l'existence de type associé à un élément de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$

Considérons un élément  $R \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  d'ordre fini  $d$  et soit  $\Pi = \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ . Le  $\mathbf{Z}$ -module  $\mathbf{Z}^n$  sera muni de sa base naturelle, son dual de la base duale et on fera ainsi correspondre matrices et applications linéaires. Soit  $V$  le  $\Pi$ -module défini par  $R$  et soit  $V^\vee$  son module contragrédient, défini par  $R^\vee$ . L'équation

$$F = RF' \tag{10}$$

entraîne  $FR^\vee = RF$ . En plus de la relation évidente  $\det(R) = 1$ , on a donc une deuxième condition nécessaire à l'existence de type  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  vérifiant (10) : il faut que  $V$  et  $V^\vee$  soient isomorphes comme  $\Pi$ -modules. Cette condition n'est pas toujours remplie (voir exemple 3.7) et elle n'est pas suffisante (exemple 3.9). Supposons qu'il existe un  $\Pi$ -isomorphisme  $\psi$  de  $V$  dans  $V^\vee$ ; sa matrice  $\Psi$  vérifie  $\Psi R = R^\vee \Psi$ . On définit un anti-isomorphisme  $\sigma$  de l'anneau  $\text{End}_\Pi V$  en posant  $x^\sigma = \psi^{-1}x^t\psi$  pour  $x \in \text{End}_\Pi V$ . Soit  $F$  une solution de (10) et soit  $f \in \text{Hom}_\Pi(V^\vee, V)$  l'application associée. En notant  $G$  la matrice de  $f\psi$ , l'équation (10) se réécrit dans  $\text{End}_\Pi V$  sous la forme matricielle

$$G = R(\Psi^\vee \Psi)G^\sigma. \tag{11}$$

Remarquer que  $\psi^\vee \psi (\psi^\vee \psi)^\sigma = \text{id}_V$ ; de plus si  $\psi^\vee \psi$  est central dans  $\text{End}_\Pi V$ , alors  $\sigma$  est involutif. Ce sera presque toujours vérifié pour les exemples traités ici. Enfin, l'action par équivalence de  $\varphi \in \mathbf{GL}_\Pi(V)$  sur  $f$  se traduit dans  $\text{End}_\Pi V$  par  $(\varphi f \varphi^t)\psi = \varphi(f\psi)\varphi^\sigma$ .

Examinons maintenant le cas – qui se présente fréquemment dans la classification des types – où le polynôme minimal de  $R$  sur  $\mathbf{Q}$  est le polynôme cyclotomique  $\Phi_d$ . Soit  $\epsilon$  une racine primitive  $d$ -ième de l'unité et soit  $\mathcal{O} = \mathbf{Z}[\epsilon]$ . Les  $\Pi$ -modules  $V$  et  $V^\vee$  sont aussi des  $\mathcal{O}$ -modules de type fini et sans torsion, donc décrits par des idéaux fractionnaires du corps  $\mathbf{Q}[\epsilon]$  ([CR81, théorème 4.13 p. 85]). Soit  $\mathfrak{a}$  un tel idéal et soit  $S$  la matrice de la multiplication par  $\epsilon$  dans une certaine base de  $\mathfrak{a}$  sur  $\mathbf{Z}$ . Il est immédiat de constater que le  $\Pi$ -module défini par  $S^{-1}$  est isomorphe à l'idéal conjugué  $\bar{\mathfrak{a}}$ . Par ailleurs, d'après [Lan94, p. 59],

$\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathfrak{a}, \mathbf{Z})$  s'identifie sur  $\mathbf{Z}$  à  $\Phi'_d(\epsilon)^{-1}\mathfrak{a}^{-1}$  via la forme trace. On en déduit que le contragrédient  $\mathfrak{a}^\vee$  de  $\mathfrak{a}$  comme  $\Pi$ -module est isomorphe à l'idéal  $\bar{\mathfrak{a}}^{-1}$ . En particulier,  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}^\vee = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{O}, \mathbf{Z})$  sont toujours  $\Pi$ -isomorphes. Cependant, comme le montre l'exemple suivant, cette propriété n'est pas vraie pour tout idéal de  $\mathbf{Q}[\epsilon]$ .

*Exemple 3.7.* Soit  $C$  le groupe des classes de  $\mathbf{Q}[\epsilon]$  et soit  $C^+$  celui de  $\mathbf{Q}[\epsilon + \bar{\epsilon}]$ . On sait que  $C^+$  s'injecte dans  $C$  et que, pour  $d$  premier, l'application norme de  $C$  dans  $C^+$  est surjective ([Was97], théorèmes 4.14 et 10.1 respectivement). Pour  $d = 257$ , le groupe  $C^+$  est non trivial ([ACH65]) ; il existe donc un idéal  $\mathfrak{a}$  distinct de  $\bar{\mathfrak{a}}^{-1}$  dans  $C$ , c.-à-d.  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{a}^\vee$  non isomorphes comme  $\Pi$ -modules.

À partir d'ici, nous supposons que le nombre  $h_d$  de classes du corps  $\mathbf{Q}[\epsilon]$  vaut 1, ce qui est le cas pour les entiers  $d$  qui nous intéressent. Dans ces conditions, on peut prendre  $V = \mathcal{O}^m$  ( $m = n/\deg(\Phi_d)$ ) et supposer que  $R$  est l'homothétie de rapport  $\epsilon$ . Considérons d'abord le cas  $m = 1$ . Soit  $\psi_0$  un  $\mathcal{O}$ -isomorphisme de  $\mathcal{O}$  sur  $\mathcal{O}^\vee$ , de matrice  $\Psi_0$ . La relation  $R^\sigma = \Psi_0^{-1}R'\Psi_0 = R^{-1}$  montre que  $\sigma$  induit la conjugaison complexe de  $\mathcal{O}$ , indépendamment du choix de  $\psi_0$ . Par ailleurs,  $\psi_0^\vee\psi_0 \in \text{End}_\Pi(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}$  s'identifie à une unité  $\xi \in \mathcal{O}^\times$ . De plus on a  $\xi\bar{\xi} = 1$ , donc  $\xi$  est une racine de l'unité puisque  $\mathbf{Q}[\epsilon]$  est un corps CM. Pour  $m$  quelconque, on prend  $\psi = \psi_0 \oplus \dots \oplus \psi_0$  ( $m$  facteurs). Les éléments de  $\text{End}_\Pi V$  se représentent par des matrices  $m \times m$  à coefficients dans  $\mathcal{O}$  ( $\mathcal{O}^m$  étant muni de sa base canonique sur  $\mathcal{O}$ ) ou par des matrices à coefficients dans  $\mathbf{Z}$  formées de  $m^2$  blocs. Ainsi on voit (compte tenu du cas  $m = 1$ ) que pour tout  $X \in M_m(\mathcal{O})$ ,  $X^\sigma$  est la transposée de la conjuguée complexe de  $X$ , que nous noterons  $X^*$ . Soit  $\mathfrak{F} \in M_m(\mathcal{O})$  la matrice de  $f\psi$ . Dans  $M_m(\mathcal{O})$ , l'équation (11) prend la forme

$$\mathfrak{F} = \epsilon\xi\mathfrak{F}^*. \quad (12)$$

En particulier, on a la relation  $\det(\mathfrak{F}) = (\epsilon\xi)^m \overline{\det(\mathfrak{F})}$ . Si l'on change le choix de  $\psi_0$ , l'unité  $\xi$  est multipliée par une unité de la forme  $u/\bar{u}$  avec  $u \in \mathcal{O}^\times$ . Nous avons donc prouvé le résultat suivant.

**Proposition 3.8.** *Soit  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  tel que  $\Phi_d(FF^\vee) = 0$ . On suppose que  $h_d = 1$ . Soit  $\epsilon$  une racine primitive  $d$ -ième de l'unité et soit  $\psi_0$  un isomorphisme de  $\mathcal{O} = \mathbf{Z}[\epsilon]$  sur  $\mathcal{O}^\vee$ . On pose  $m = n/\deg(\Phi_d)$  et  $\xi = \psi_0^\vee\psi_0(1)$ . Alors  $(\epsilon\xi)^m$  est de la forme  $u/\bar{u}$  avec  $u \in \mathcal{O}^\times$ , condition indépendante des choix de  $\epsilon$  et  $\psi_0$ .*

*Exemple 3.9.* Cette condition est toujours satisfaite pour  $m$  pair, comme on le voit en prenant  $u = (\epsilon\xi)^{m/2}$ . Si  $d = 2^k$  ( $k \geq 1$ ), on a  $\xi = 1$  et on sait qu'il n'existe pas d'unité  $u \in \mathcal{O}^\times$  telle que  $\epsilon = u/\bar{u}$  (preuve du cor. 4.13, p. 40 de [Was97]) ; l'existence de type isodual  $F$  tel que  $\Phi_{2^k}(FF^\vee) = 0$  n'est donc possible que si  $m$  est pair, c.-à-d. rang  $F$  divisible par  $2^k$ . Un phénomène analogue se produit pour  $d = 3$  ( $\xi = -\epsilon^2$ ) et pour  $d = 5$  ( $\xi = -\epsilon^2$ ).

### 3.4 Commentaires et conventions préliminaires

Un des outils fondamentaux dans la détermination des types est la classification des formes quadratiques entières de petit déterminant (cf. par exemple [CS99, ch. 15] ou [Ser70, ch. V] pour le déterminant  $\pm 1$ ) qui renseigne sur la composante symétrique  $(M_1, F)$  des types (proposition 3.5). En particulier les types d'ordre 1, c.-à-d. symétriques, de rang  $\leq 7$  sont représentés par  $I_{p,q}$  (type impair) et par les sommes de  $U_2$  (type pair). Il est aussi bien connu qu'il n'existe



qu'un seul type antisymétrique ( $FF^\vee = -I_n$ ) représenté par  $J_{2m} = J_2 \otimes I_m$  ; plus généralement, d'après [Bou59, §5 n° 1], la composante antisymétrique  $(M_2, F)$  d'un type d'ordre pair est isométrique à  $(\mathbf{Z}^{2m}, a_1 J_2 \oplus \cdots \oplus a_m J_2)$  pour une certaine suite décroissante  $(a_1), \dots, (a_m)$  d'idéaux de  $\mathbf{Z}$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

Nous procéderons à la classification des types algébriques suivant la méthode générale indiquée au §2.5. Les éléments d'ordre fini de  $GL_n(\mathbf{Z})$  sont donnés dans l'annexe dont on reprend les notations. Comme les types symétriques et antisymétriques sont connus, nous pourrions toujours supposer que  $R = FF^\vee$  est distinct de  $\pm I_n$ . Pour chaque matrice  $R \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$  des tables 15 et 16 de l'annexe, il s'agira de classer les solutions  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  de l'équation linéaire  $F = RF'$  modulo l'action par équivalence du commutant  $C_R$ . Nous chercherons fréquemment des informations sur la composante symétrique de  $F$  – quand elle non triviale. Pour cela, nous noterons  $\Delta$  la transposée de la matrice d'une base du sous-module  $\bigoplus_{k|d} \ker \Phi_k(R^\vee)$ . Si  $P \in C_R$ , alors  $Q = \Delta P \Delta^{-1} = \bigoplus_{k|d} Q_k$  est diagonale par blocs et chaque  $Q_k$  s'identifie à un élément  $\mathfrak{P}_k$  de  $\mathbf{GL}(W_k)$ , où  $W_k$  est un module sur l'anneau  $\mathcal{O}_k$  des entiers du corps des racines  $k$ -ièmes de l'unité – ici on aura toujours  $W_k = \mathcal{O}_k^{m_k}$  ( $m_k \in \mathbf{N}^*$ ). Comme la « diagonalisation » n'est que rationnelle il y a généralement des relations arithmétiques entre les éléments  $\mathfrak{P}_k$  : le commutant  $C_R$  est isomorphe à un sous-groupe, souvent propre, de  $\prod_{k|d} \mathbf{GL}(W_k)$ . Par ailleurs, on a évidemment  $Q \cdot (\Delta \cdot F) = \Delta \cdot (P \cdot F)$  et l'action de  $C_R$  sur  $F$  sera précisée *via* celle du sous-groupe diagonal par blocs  $C_R^\Delta = \Delta C_R \Delta^{-1}$ . Nous utiliserons notamment les matrices suivantes :

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

vérifiant  $\Delta_3 X_3 \Delta_3^{-1} = I_1 \oplus J_2$ ,  $\Delta_4 (R_2 \oplus R_2) \Delta_4^{-1} = I_{2,2}$  et  $\det(\Delta_4) = 4$ .

Dans ce qui suit, nous noterons toujours  $F$  une solution de  $F = RF'$  et  $P$  une matrice qui commute avec  $R$ . Les coefficients de  $PFP'$  sont à  $F$  fixée des formes quadratiques en  $P$ , certaines étant parfois liées à la composante symétrique de  $F$ . Comme première étape de la classification ( $R$  étant donné), il pourra être utile dans certains cas de ramener le premier coefficient de  $PFP'$ , c.-à-d.

$$q_F = (PFP')_{1,1}, \quad (14)$$

à des valeurs particulières en utilisant à nouveau la classification des formes entières combinée avec la description du commutant  $C_R$ .

Les types de rang  $n \leq 4$  et les types principaux de rang 5, 6 et 7 sont classés dans les tables 2 à 7 suivant leur ordre  $d$  ; les indécomposables sont signalés par un astérisque (\*) et explicités dans l'annexe, équations (66) à (71). Pour la notion de type réel, voir §§4.1-4.2 et particulièrement la proposition 4.15 page 37. Le type réel  $P_{2;k,l}$  est défini par l'équation (33). Dans toutes ces tables, les types avec  $FF^\vee$  fixé (à conjugaison près) sont distingués par leur type réel et à égalité des types réels par leur composante symétrique (voir proposition 3.5), par exemple par sa parité.

### 3.5 Types algébriques pour $n \leq 4$

Pour chaque matrice  $R \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$  de la table 15 (p. 62) il est facile d'expliquer les solutions entières  $F \in M_n(\mathbf{Z})$  de l'équation linéaire (10). Dans certains



cas on constate que  $\det(F)$  est divisible par un entier  $\geq 2$ , donc (10) n'a pas de solution dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  (voir aussi §3.3, ex. 3.9). Par exemple : si  $R = J_2$ , alors  $F = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & a \end{pmatrix}$  et  $\det(F) = 2a^2$  ; si  $R = V_2$  alors  $F = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & a \end{pmatrix}$  et  $\det(F) = 3a^2$  ( $a \in \mathbf{Z}$ ). On peut ainsi éliminer  $V_2, J_2$  ( $n = 2$ ),  $I_1^- R_2, I_1 V_2, I_1 J_2$  ( $n = 3$ ) et  $I_{1,1} R_2, I_2 V_2, I_2^- V_2, I_2 J_2, I_2^- J_2, I_1^- X_3^-, V_4, I_1^- R_3^-, V_2 W_2, T_4, X_4, V_2 J_2, W_2 J_2$  ( $n = 4$ ) – ici  $AB = A \oplus B$ .

Remarquons ensuite que les types associés à  $I_{1,2}$  et  $I_1 W_2$  sont tous scindés (proposition 3.4). Les seuls cas qui restent à examiner pour  $n \leq 3$  sont  $R = W_2, R_3$  et  $X_3$ . Une vérification immédiate montre que les seules solutions  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  de (10) sont alors  $\pm F_2$  si  $R = W_2$ ,  $\pm F_3$  si  $R = R_3$  et  $\pm G_3, \pm H_3$  si  $R = X_3$  (équations (66) et (67) de l'annexe). Dans la table 2 (types de rang  $n \leq 3$ ) l'entier  $t$  (resp.  $t'$ ) désigne le nombre de types (resp. de types principaux) de rang donné.

$n$	$(t; t')$	$d$	$FF^\vee$	$F$	type réel
1	(2;2)	1	$I_1$	$\pm I_1^*$	$\pm I_1$
2	(7;5)	1	$I_2$	$I_{p,2-p}$ $U_2^*$	$I_{p,2-p}$ $I_{1,1}$
		2	$I_2^-$	$J_2^*$	$J_2$
		6	$W_2$	$\pm F_2^*$	$\pm P_{2;6,1}$
3	(16;10)	1	$I_3$	$I_{p,3-p}$	$I_{p,3-p}$
		2	$I_{1,2}$	$\pm I_1 J_2$	$\pm I_1 J_2$
		3	$R_3$	$\pm F_3^*$	$\pm I_1 P_{2;3,1}^-$
		4	$X_3$	$\pm G_3^*$ $\pm H_3^*$	$\pm I_1 P_{2;4,1}^-$ $\pm I_1 P_{2;4,1}$
		6	$I_1 W_2$	$\pm I_{p,1-p} F_2$	$\pm I_{p,1-p} P_{2;6,1}$

TABLE 2 – Types isoduaux de rang  $\leq 3$

Pour  $n = 4$ , certains éléments d'ordre fini  $R$  ne donnent pas de types (voir plus haut). Les types associés à  $I_{2,2}, I_2 W_2$  et  $I_2^- W_2$  sont tous décomposés (proposition 3.4), voir table 3. Bien sûr  $-I_4$  donne le type antisymétrique  $J_4$ . Il reste à examiner  $R_2 R_2, I_1 R_3, V_2 V_2, J_2 J_2, I_1 X_3, W_2 W_2, W_4$  et  $Y_4$ . Nous prouverons que  $I_1 X_3$  donne aussi des types scindés grâce au lemme 3.6 ; les relations éventuelles entre les sommes (telle que (15) p. 18) seront signalées au fur et à mesure.

**Cas où  $R = R_2 \oplus R_2$  (ordre 2).** Les solutions de (10) sont de la forme

$$F = \begin{pmatrix} a(I_2 + R_2) & bI_2 + cR_2 \\ cI_2 + bR_2 & d(I_2 + R_2) \end{pmatrix}$$

avec  $\det(F) = (b-c)^2[4(ad-bc) - (b-c)^2]$ . Si  $F \in \mathbf{GL}_4(\mathbf{Z})$ , on a nécessairement  $b-c = \pm 1$  (ainsi  $b$  et  $c$  sont premiers entre eux),  $ad = bc$  et  $\det(F) = -1$ . Il existe donc des entiers  $u, v, w$  et  $x$  tels que  $a = uv, d = wx, b = uw$  et  $c = vx$  (en particulier  $uw - vx = \pm 1$ ). La matrice  $P = \begin{pmatrix} w & -v \\ -x & u \end{pmatrix} \otimes I_2$  commute avec  $R = I_2 \otimes R_2$  et on vérifie que  $PPF' = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ , qui définit donc l'unique type associé à  $R$ , noté  $F_4$ .

**Cas où  $R = I_1 \oplus R_3$  (ordre 3).** On a

$$P = \begin{pmatrix} u & v\alpha \\ w\alpha' & xI_3 + yR_3 + zR_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} a & b\alpha \\ b\alpha' & c(I_3 + R_3) + dR_3^2 \end{pmatrix},$$

avec  $\alpha = (1, 1, 1)$  – noter que  $\alpha R_3 = \alpha$ . Tout d’abord, étant donné  $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$  vérifiant  $\text{pgcd}(u, 3v) = 1$ , il existe  $(w, x, y, z) \in \mathbf{Z}^4$  tel que  $P \in \mathbf{GL}_4(\mathbf{Z})$ . En effet on a  $\det(P) = (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(u(x + y + z) - 3vw)$  ; il existe  $(t, w) \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $tu - 3vw = 1$ , où nécessairement  $t = 3k + \epsilon$ ,  $\epsilon = \pm 1$  et  $k \in \mathbf{Z}$ . Il suffit de poser  $x = y = k$  et  $z = k + \epsilon$  pour avoir  $\det(P) = 1$ . Considérons maintenant la forme  $q_F(u, v) = au^2 + 6buv + 3(2c + d)v^2$  définie par l’équation (14), de forme polaire entière  $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ 3b & 6c + 3d \end{pmatrix}$  (qui correspond ici à la composante symétrique de  $F$ , voir proposition 3.5). Comme  $\det(F) = (c - d)^2(a(2c + d) - 3b^2) = \pm 1$ , on voit que  $\det(A) = \pm 3$ . Par conséquent, d’après la classification des formes entières (cf. [CS99, pp. 360 et 362], la forme  $q_F$  représente  $\pm 1$  si elle impaire et  $\pm 2$  si elle paire. Il existe donc  $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $q_F(u, v) = \pm 1$  ou  $\pm 2$ , ce qui entraîne  $\text{pgcd}(u, 3v) = 1$ . En faisant agir le commutant  $C_R$ , on peut donc supposer que  $a = \pm 1$  ou  $a = \pm 2$ . Dans le premier cas,  $F$  est équivalente à un type décomposé (lemme de scindement 3.6) et on est ramené à des types de rang inférieur (voir table 3). Quitte à changer  $F$  en  $-F$ , il reste à examiner le cas où  $a = 2$  (donc  $b$  impair) avec  $q_F$  paire (donc  $d$  pair). L’action de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\alpha' & I_3 \end{pmatrix} \in C_R$  par équivalence sur  $F$  conserve  $a$  et change  $b$  en  $b + na$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) : on peut de plus prendre  $b = 1$ . Le couple  $(c, d) \in \mathbf{Z} \times 2\mathbf{Z}$  est alors uniquement déterminé par  $|\det(F)| = 1$ , il s’agit de  $c = 1$  et  $d = 0$ . En résumé, nous avons trouvé 6 types, dont 2 indécomposables  $\pm G_4$  (équation (68) p. 64) et 4 scindés, discernables par leurs composantes réelles (voir table 3).

**Cas où  $R = I_1 \oplus X_3$  (ordre 4).** Considérons plus généralement  $R = I_q \oplus X_3$  en dimension  $n = q + 3 \geq 4$ . Soit  $\Delta = I_q \oplus \Delta_3$  (voir équation (13)), de sorte que  $\Delta R \Delta^{-1} = I_{q+1} \oplus J_2$  et  $\det(\Delta) = 2$ . Pour  $F$  solution inversible de (10), on pose  $\Delta \cdot F = A_F \oplus B_F$ . Les matrices  $F$  et  $A_F$  sont de la forme

$$F = \begin{pmatrix} A & v & 0 \\ v' & f & g\alpha \\ 0 & gJ_2\alpha' & g(I_2 + J_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_F = \begin{pmatrix} A & 2v \\ 2v' & 4f - 2g \end{pmatrix},$$

avec  $A \in M_q(\mathbf{Z})$  symétrique,  $v \in \mathbf{Z}^q$ ,  $\alpha = (1, 0)$  et  $f, g \in \mathbf{Z}$  ; en outre  $B_F = g(I_2 + J_2)$ . On voit que  $g^2$  divise  $\det(F) = \pm 1$ , d’où  $g^2 = 1$ ,  $\det(B_F) = \pm 2$  et  $\det(A_F) = \pm 2$ . La forme  $A_F$  appartient donc à l’un des genres  $\text{I}_{r,s}(2)$  ou  $\text{II}_{r,s}(2)$  (cf. [CS99, pp. 386-387]). On sait de plus que les genres indéfinis de rang  $\geq 3$  et de petit déterminant ne contiennent qu’une seule classe d’équivalence entière. Dans le cas indéfini, les genres ci-dessus sont représentés de façon unique par une forme du type  $B \oplus (\pm 2I_1)$  avec  $\det(B) = \pm 1$  ; c’est encore vrai pour  $\text{I}_{1,1}(2)$  car toute forme binaire indéfinie représente 1 ([CS99, p. 362]). Dans le cas défini, notons  $\gamma_k$  la constante d’Hermite en dimension  $k$ . Pour  $2 \leq k \leq 6$ , on a  $2^{1/k}\gamma_k < 2$ , donc toute forme définie de rang  $k$  et de déterminant  $\pm 2$  est équivalente à la forme diagonale  $\pm(I_{k-1} \oplus 2I_1)$ . Finalement, si  $\text{rang}(A_F) = q + 1 \leq 6$ , il existe dans tous les cas une matrice  $Q \in \mathbf{GL}_{q+1}(\mathbf{Z})$  telle que  $Q \cdot A_F = B \oplus (\pm 2I_1)$  avec  $\det(B) = \pm 1$ . En mettant 2 en facteur dans la dernière ligne de  $A_F$  puis en réduisant modulo 2, on voit que  $A$  est inversible modulo 2. Il suit que nécessairement  $Q \in \Gamma_0^{q+1}$  (voir l’énoncé du lemme 3.11, p. 20), en particulier  $Q[q, q]$  est impair. On vérifie ensuite que  $\Delta^{-1}(Q \oplus I_2)\Delta$  est entier, donc appartient au commutant  $C_R$ . Par conséquent on peut supposer

que  $A_F = B \oplus (\pm 2I_1)$  et tous les types associés à  $R$  sont scindés (pourvu que  $1 \leq q \leq 5$ ). Pour  $q = 1$ , la liste des 8 types possibles à priori (voir table 2) se réduit à 6 types (distincts) grâce à la relation

$$[-I_1 \oplus G_3] = [I_1 \oplus -H_3], \quad (15)$$

où l'équivalence est donnée par  $P = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & I_3 \end{pmatrix}$  avec  $\beta = (2, -1, 1)$  et  $\gamma = (1, 0, 0)$ .

Il ne reste à examiner que des cas où le polynôme minimal de  $R$  est un polynôme cyclotomique  $\Phi_d$  ( $d = 3, 4, 5, 6, 10, 12$ ). Posons  $m = 4/\deg(\Phi_d)$ . Nous procéderons comme indiqué en 3.3 pour nous ramener au cadre des modules sur l'anneau  $\mathcal{O} = \mathbf{Z}[\epsilon]$  des entiers cyclotomiques,  $\epsilon$  étant une racine primitive  $d$ -ième de l'unité. Le  $\mathbf{Z}$ -module  $\mathcal{O}$  sera muni de la base  $(1, \epsilon, \dots)$  et  $\mathcal{O}^m$  de sa base canonique comme  $\mathcal{O}$ -module. Ainsi  $\mathbf{Z}^4$  s'identifie à  $\mathcal{O}^m$  puisque  $h_d = 1$  et  $R$  est la matrice (sur  $\mathbf{Z}$ ) de la multiplication par  $\epsilon$ . Par un choix convenable de  $\Psi \in \mathbf{GL}_4(\mathbf{Z})$  tel que  $\Psi R = R^\vee \Psi$  on se ramène à l'équation (12)  $\mathfrak{F} = \epsilon \xi \mathfrak{F}^*$ . Ses solutions  $\mathfrak{F} \in \mathbf{GL}_m(\mathcal{O})$  sont à déterminer modulo l'action de  $\mathbf{GL}_m(\mathcal{O})$  par  $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{F} = \mathfrak{P} \mathfrak{F} \mathfrak{P}^*$  ( $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_m(\mathcal{O})$ ) qui correspond à l'action du commutant de  $R$  sur les solutions de  $F = RF'$ , voir 3.3.

**Lemme 3.10.** *Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers cyclotomiques comme ci-dessus et soit  $\theta \in \mathcal{O}$  tel que  $\theta\bar{\theta} = 1$ . On suppose que  $\{z \in \mathcal{O}; z = \theta\bar{z}\} = \{w + \theta\bar{w}; w \in \mathcal{O}\}$ . Soit  $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$  vérifiant  $\mathfrak{F} = \theta \mathfrak{F}^*$  et  $\alpha\delta = 0$ . Alors il existe  $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$  tel que  $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ .*

*Preuve.* On peut supposer que  $\alpha = 0$ . On a  $\beta \in \mathcal{O}^\times$  et par hypothèse il existe  $w \in \mathcal{O}$  tel que  $\delta = w + \theta\bar{w}$ . Alors  $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ -w\beta^{-1} & 1 \end{pmatrix}$  convient.

**Cas où  $R = V_2 \oplus V_2$  (ordre 3).** On prend  $\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\Psi = \Psi_0 \oplus \Psi_0$ , d'où  $\xi = -\epsilon^2$  (avec les notations de 3.3). L'équation (12) s'écrit donc  $\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^* = 0$  et on cherche  $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \delta \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$  avec  $\alpha$  et  $\delta$  éléments de  $(\epsilon - \bar{\epsilon})\mathbf{Z} = (1 + 2\epsilon)\mathbf{Z}$ . En revenant sur  $\mathbf{Z}$ , on constate que  $2q_F$  (équation (14)) est une forme paire à 4 variables dont le déterminant coïncide avec celui de  $F$ . Si  $F \in \mathbf{GL}_4(\mathbf{Z})$ , on voit donc que  $q_F$  représente 0 (et que  $\det(F) = 1$ ). Pour  $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$  et  $\mathfrak{F}$  comme plus haut on peut écrire

$$(\epsilon - \bar{\epsilon})q_F = \alpha|u|^2 - \bar{\beta}v\bar{u} + \beta u\bar{v} + \delta|v|^2.$$

Il existe donc  $(u, v) \in \mathcal{O}^2$ ,  $(u, v) \neq (0, 0)$  avec  $\text{pgcd}(u, v) = 1$  qui annule  $q_F$ . Comme  $\mathcal{O}$  est principal,  $(u, v)$  est la première ligne d'un élément de  $\mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$ . Par conséquent, on peut supposer que  $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\bar{\beta} & \delta \end{pmatrix}$ . Alors (lemme 3.10)  $\mathfrak{F}$  est équivalente à  $J_2$  et il existe un unique type associé à  $R$ . Le représentant  $H_4$  (équation (68), p. 64)) correspond à  $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\bar{\epsilon} & 0 \end{pmatrix}$ .

**Cas où  $R = J_2 \oplus J_2$  (ordre 4).** On prend  $\Psi_0 = I_2$ ,  $\Psi = I_4$ , d'où  $\xi = 1$ . L'anneau  $\mathcal{O} = \mathbf{Z}[i]$  est muni de la  $\mathbf{Z}$ -base  $(1, i)$ , de sorte que  $R$  correspond à la multiplication par  $-i$  dans  $\mathcal{O}^2$ ; l'équation (12) s'écrit  $\mathfrak{F} + i\mathfrak{F}^* = 0$  et on cherche  $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -i\bar{\beta} & \delta \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$  avec  $\alpha, \delta \in (1 - i)\mathbf{Z}$ . Noter que  $\det(\mathfrak{F}) = \pm i$  est un invariant du type. Si  $\alpha\delta = 0$ , d'après le lemme 3.10,  $\mathfrak{F}$  est équivalente dans  $\mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$  à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$  qui correspond au type  $K_4$  (voir équation (68) p. 64). Nous déterminons les types restants en nous inspirant de la méthode classique

$d$	$FF^\vee$	$F$	type réel
1	$I_4$	$I_{p,4-p}$	$I_{p,4-p}$
		$U_2U_2$	$I_{2,2}$
2	$-I_4$	$J_4$	$J_2^2$
		$\pm I_2J_2$	$\pm I_2J_2$
		$I_{1,1}J_2$	$I_{1,1}J_2$
		$U_2J_2$	$I_{1,1}J_2$
	$R_2R_2$	$F_4^*$	$I_{1,1}J_2$
3	$I_1R_3$	$\pm I_{p,1-p}F_3$	$\pm I_{p+1,1-p}P_{2;3,1}^-$
		$\pm G_4^*$	$\pm I_2P_{2;3,1}$
	$V_2V_2$	$H_4^*$	$P_{2;3,1}P_{2;3,1}^-$
4	$J_2J_2$	$K_4^*$	$P_{2;4,1}P_{2;4,1}^-$
		$\pm L_4^*$	$\pm P_{2;4,1}^2$
	$I_1X_3$	$\pm I_{p,1-p}G_3$	$\pm I_{p+1,1-p}P_{2;4,1}^-$
		$\pm I_1H_3$	$\pm I_2P_{2;4,1}$
6	$I_2W_2$	$\pm I_{p,2-p}F_2$	$\pm I_{p,2-p}P_{2;6,1}$
		$\pm U_2F_2$	$\pm I_{1,1}P_{2;6,1}$
	$I_2^-W_2$	$\pm J_2F_2$	$\pm J_2P_{2;6,1}$
	$W_2W_2$	$\pm F_2F_2$	$\pm P_{2;6,1}^2$
		$F_2F_2^-$	$P_{2;6,1}P_{2;6,1}^-$
10	$W_4$	$\pm M_4^*$	$\pm P_{2;10,1}P_{2;10,3}$
		$\pm N_4^*$	$\pm P_{2;10,1}P_{2;10,3}^-$
12	$Y_4$	$\pm O_4^*$	$\pm P_{2;12,1}P_{2;12,5}^-$

TABLE 3 – Types isoduaux de rang 4 (47 types, 21 principaux)

de réduction des formes binaires (cf. [Bue89, p. 14]). Pour  $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ , on a  $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \delta & \delta\bar{x} - i\bar{\beta} \\ * & * \end{pmatrix}$ , où l'on peut choisir  $x \in \mathcal{O}$  tel que  $|\delta\bar{x} - i\bar{\beta}| \leq |\delta|/\sqrt{2}$ . En supposant que les termes diagonaux sont toujours non nuls, on est ainsi ramené au bout d'un nombre fini d'étapes à  $\sqrt{2}|\beta| \leq |\alpha| \leq |\delta|$ ; comme  $\det(\mathfrak{F}) = \pm i$ , on a  $|\alpha\delta| \leq 1 + |\beta|^2$  et forcément  $|\alpha\delta| \leq 2$ . Ce qui conduit à  $\alpha = \delta = \pm(1 - i)$  et  $|\beta| = 1$ . Enfin  $\beta$  peut être fixé arbitrairement, par exemple  $\beta = -i$  qui donne  $\pm L_4$  (équation (68) p. 64). Le cas précédent  $R = V_2 \oplus V_2$  se traite aussi par cette méthode.

**Cas où  $R = W_2 \oplus W_2$  (ordre 6).** Pour  $\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  on trouve  $\xi = 1 - \epsilon = \bar{\epsilon}$  et  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ . Le lemme 3.10 s'applique à nouveau, de sorte que toute solution  $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$  avec  $\alpha\delta = 0$  est équivalente à  $U_2$ . Mais  $U_2$  est équivalente par  $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -\bar{\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathcal{O})$  à  $I_{1,1}$ , qui correspond au type  $F_2 \oplus (-F_2)$ . En supposant maintenant que les termes diagonaux sont toujours non nuls, on se ramène par un procédé de réduction comme dans le cas précédent à  $\sqrt{3}|\beta| \leq |\alpha| \leq |\delta|$ . Puisque  $|\det(\mathfrak{F})| = 1$ , on voit que  $0 < |\alpha\delta| \leq 3/2$ , d'où  $\alpha \in \mathcal{O}^\times$ . Grâce au lemme de scindement 3.6 ( $\alpha$  correspond au premier bloc de  $F$ ), ou par une vérification directe, on trouve encore des types décomposés. Tous les types associés à  $W_2 \oplus W_2$  sont donc scindés (voir table 3).

**Cas où  $R = W_4$  (ordre 10).** Comme  $m = 1$ , l'équation (12) se réduit à une relation scalaire dans  $\mathcal{O}$ . Soit  $\Psi = (\psi_{i,j}) \in \mathbf{GL}_4(\mathbf{Z})$  de coefficients  $\psi_{i,j} = 1$  si  $0 \leq j - i \leq 1$ ,  $\psi_{i,j} = 0$  sinon. On a  $\xi = \bar{\epsilon}$ ; il s'agit donc de trouver les unités réelles  $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}^\times$  modulo multiplication par  $u\bar{u}$  ( $u \in \mathcal{O}^\times$ ). Toute unité de  $\mathcal{O}$  s'écrit  $u = \theta\nu^k$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) où  $\theta^{10} = 1$  et  $\nu = \epsilon - \epsilon^4$  est une unité fondamentale réelle. Le sous-groupe des  $u\bar{u}$  ( $u \in \mathcal{O}^\times$ ) est engendré par  $\nu^2$  et on trouve 4 solutions  $\mathfrak{f} = \pm 1, \pm \nu$  qui correspondent respectivement aux types  $\pm M_4$  et  $\pm N_4$  (équation (68) de l'annexe).

**Cas où  $R = Y_4$  (ordre 12).** On pose  $\Psi = (\psi_{i,j}) \in \mathbf{GL}_4(\mathbf{Z})$  avec  $\psi_{i,j} = 1$  si  $0 \leq j - i = 0$  ou  $2$ ,  $\psi_{i,j} = 0$  sinon. Alors  $\xi = -\epsilon^4$  et (12) devient

$$\epsilon\mathfrak{f} = \bar{\mathfrak{f}} \quad (\mathfrak{f} \in \mathcal{O}^\times). \quad (16)$$

On a  $\mathcal{O}^\times = \{\epsilon^l \nu^k; (k, l) \in \mathbf{Z}^2\}$ , où  $\nu = \epsilon^2 - \epsilon^3$  est une unité fondamentale vérifiant (16). Il est alors immédiat de constater que toute solution de (16) s'écrit  $\pm \nu u\bar{u}$  ( $u \in \mathcal{O}^\times$ ). Les solutions  $\pm \nu$  correspondent aux types  $\pm O_4$  (équation (68) de l'annexe).

### 3.6 Types algébriques principaux de rang 5

Dans  $\mathbf{GL}_5(\mathbf{Z})$  il y a 20 classes de conjugaison d'éléments d'ordre  $2^k$  et de déterminant 1, décrites dans la table 16. Pour  $R = I_{2,1}R_2, I_3^-R_2, J_2X_3, R_2X_3^-, I_{1,1}X_3^-, I_1Z_4, I_1Z_4', I_1Z_4'',$  une vérification directe montre que le déterminant d'une solution entière  $F$  de  $F = RF'$  est divisible par 2. Pour la même raison, ou en utilisant la proposition 3.4 et l'exemple 3.9, on peut aussi éliminer  $I_3J_2, I_{1,2}J_2, I_1^-R_2J_2$  et  $I_1X_4$ . Ensuite,  $I_5$  donne les types symétriques et  $I_{3,2}, I_{1,4}, I_1J_2J_2$  et  $I_2^-X_3$  ne donnent que des types scindés (proposition 3.4), sans relations nouvelles (voir table 4). Nous avons également prouvé (§3.5, cas  $I_1X_3$  p. 17) que tous les types associés à  $I_2X_3$  sont scindés; compte tenu de la relation (15), on trouve ainsi 12 types (table 4). Finalement, les seuls éléments qui restent à examiner sont  $I_1R_2R_2$  et  $X_5$ .

**Cas où  $R = I_1 \oplus R_2 \oplus R_2$  (ordre 2).** Pour traiter les dimensions  $n \geq 5$ , il est utile de considérer plus généralement  $R = I_q \oplus R_2 \oplus R_2$  où  $q = n - 4 \geq 1$ . Soit  $\alpha = (1, 1)$ . Avec les notations du §3.5, on a alors

$$P = \begin{pmatrix} U & v\alpha & w\alpha \\ \alpha'x' & V & W \\ \alpha'y' & X & Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} A & b\alpha & c\alpha \\ \alpha'b' & d(I_2 + R_2) & fI_2 + gR_2 \\ \alpha'c' & gI_2 + fR_2 & e(I_2 + R_2) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

avec  $A, U \in M_q(\mathbf{Z})$  et  $A$  symétrique,  $b, c, v, w, x, y \in \mathbf{Z}^q$  (vecteurs colonnes),  $d, e, f, g \in \mathbf{Z}$  et  $V, W, X, Y$  polynômes de degré au plus 1 en  $R_2$ . Soit  $\Delta = I_q \oplus \Delta_4$  (voir équation (13)), de sorte que  $\Delta R \Delta^{-1} = I_{q+2,2}$ . On vérifie que  $\Delta C_R \Delta^{-1}$  coïncide avec le sous-groupe  $\Gamma^{n-2,2}$  de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  défini dans le lemme suivant.

**Lemme 3.11.** *Pour  $0 < l < k$ , notons  $\Gamma_0^{k,l}$  le groupe des  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_k(\mathbf{Z})$  où  $C \in M_{l,k-l}(\mathbf{Z})$  est congrue à 0 modulo 2. Posons également  $\Gamma_0^{k,k} = \mathbf{GL}_k(\mathbf{Z})$ . Soient  $r_1$  et  $r_2 \geq 2$  et soit  $\Gamma^{r_1,r_2}$  le groupe des matrices  $Q_1 \oplus Q_2 \in \mathbf{GL}_{r_1+r_2}(\mathbf{Z})$  avec  $Q_j = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{r_j,2}$  ( $j = 1, 2$ ) et  $D_1 \equiv D_2$  modulo 2. Alors les morphismes « composantes » de  $\Gamma^{r_1,r_2}$  dans  $\Gamma_0^{r_j,2}$  ( $j = 1, 2$ ) sont surjectifs.*

*Preuve.* Étant donné  $Q_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{r_1, 2}$ , il existe  $D_2 \in M_2(\mathbf{Z})$  dont les coefficients valent 0 ou 1 et telle  $D_2 \equiv D_1 \pmod{2}$ . Mais  $D_1$  est inversible modulo 2, donc  $\det(D_2) = \pm 1$ . Par construction, on a  $Q_1 \oplus I_{r_2-2} \oplus D_2 \in \Gamma^{r_1, r_2}$ .

Posons maintenant  $\Delta \cdot F = A_F \oplus B_F$ . On a alors  $B_F = 2(f - g)J_2$  et

$$A_F = \begin{pmatrix} A & 2b & 2c \\ 2b' & 4d & 2f + 2g \\ 2c' & 2f + 2g & 4e \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Ainsi  $\det(A_F)$  est divisible par 4; vu que  $(f - g)^2 \det(A_F) = 4 \det(F) = \pm 4$ , on a  $(f - g)^2 = 1$  et  $\det(A_F) = \pm 4$ . En mettant 2 en facteur dans les deux dernières colonnes de  $A_F$ , on voit que  $\det(A)$  est impair. Si  $M$  est une matrice carrée symétrique et inversible, on la relation

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B'M^{-1} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M & B \\ B' & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & C - B'M^{-1}B \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Comme  $A$  est inversible sur l'anneau  $\mathbf{Z}_2$  des entiers 2-adiques, on en déduit que la décomposition de Jordan 2-adique de  $A_F$  est de la forme  $f_1 \oplus 2f_2$ , avec  $f_1$  de rang  $q$  et  $f_2$  paire de rang 2. De plus, si  $A_F$  est équivalente par un élément  $Q_1 \in \mathbf{GL}_{n-2}(\mathbf{Z})$  à une matrice  $A^0$  de la forme (18), un calcul modulo 2 montre que nécessairement  $Q_1 \in \Gamma_0^{n-2, 2}$ . Grâce au lemme 3.11, il existe  $P \in C_R$  tel que  $A_{P \cdot F} = A^0$ . En particulier la classe entière de  $A_F$  caractérise le type  $[F]$ .

Revenons au cas  $q = 1$ . D'après ce qui précède,  $A_F$  appartient au genre  $I_{r,s}(2_{\text{II}}^2)$ , qui est nécessairement indéfini en rang  $r + s = 3$  (cf. [CS99, pp. 386-387]). On sait de plus que les genres indéfinis de rang  $\geq 3$  et de petit déterminant ne contiennent qu'une seule classe d'équivalence entière. Donc  $A_F$  est équivalente à  $\pm I_1 \oplus 2U_2$  qui représente le genre  $I_{r,s}(2_{\text{II}}^2)$  suivant que  $(r, s) = (2, 1)$  ou  $(1, 2)$ . On peut donc supposer (voir ci-dessus) que  $A_F = \pm I_1 \oplus 2U_2$  et finalement  $F$  est équivalente à un type décomposé  $\pm(I_1 \oplus F_4)$ .

**Cas où  $R = X_5$  (ordre 8).** Considérons plus généralement  $R = I_q \oplus X_5$  ( $q \geq 0$ ). Soit  $\epsilon$  une racine primitive 8-ième de l'unité et soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers du corps cyclotomique  $\mathbf{Q}[\epsilon]$ . Pour  $z \in \mathcal{O}$ , notons  $M(z)$  la matrice de la multiplication par  $z$  dans la base  $(1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3)$ . Soit enfin  $\Delta = I_q \oplus \Delta_5$  et  $\Psi = I_q \oplus \Psi_5$  avec

$$\Delta_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $P \in C_R$ . On a  $\Delta P \Delta^{-1} = Q_1 \oplus M(\theta)$  où  $Q_1 \in \Gamma_0^{q+1, 1}$  (groupe défini au lemme 3.11) et  $\theta = v + w\epsilon + x\epsilon^2 + y\epsilon^3 \in \mathcal{O}^\times$ . Noter que  $Q_1[q+1, q+1] \equiv v + w + x + y \equiv 1 \pmod{2}$ . Posons  $P = P(Q_1, \theta)$ . On vérifie alors que  $\Psi^\vee \Psi = P(I_{q+1}, -\epsilon^3)$  et que  $P(Q_1, \theta)^\sigma = \Psi^{-1} P(Q_1, \theta)' \Psi = P(Q_1^\tau, \bar{\theta})$ , où  $\tau$  est l'involution de  $\Gamma_0^{q+1, 1}$  ( $q > 0$ ) définie par

$$\begin{pmatrix} U & v \\ 2w' & x \end{pmatrix}^\tau = \begin{pmatrix} U & w \\ 2v' & x \end{pmatrix},$$

ou l'identité si  $q = 0$ . En posant  $F\Psi = P(A, \mathfrak{f})$ , l'équation  $F = RF'$  ramenée sous la forme (11) s'écrit  $P(A, \mathfrak{f}) = P(A^\tau, \bar{\mathfrak{f}})$ .

Si  $q = 0$ , les types associés à  $X_5$  sont donc paramétrés par les couples  $(a, \mathfrak{f})$  avec  $a = \pm 1$  et  $\mathfrak{f}$  unité réelle de  $\mathbf{Q}[\epsilon]$  modulo multiplication par  $\theta\bar{\theta}$  ( $\theta \in \mathcal{O}^\times$ ). On

sait que  $\nu = 1 + \epsilon - \epsilon^3$  ( $= 1 \pm \sqrt{2}$  suivant le choix de  $\epsilon$ ) est une unité fondamentale à la fois pour  $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$  et pour  $\mathbf{Q}[\epsilon]$ . Par suite, on peut supposer que  $f = \pm 1$  ou  $\pm \nu$  et on trouve 8 types. Les types  $F_5$ ,  $G_5$ ,  $H_5$  et  $K_5$  (équation (69) et table 4), indécomposables, correspondent respectivement à  $a = 1$  et  $\mathfrak{f} = 1, -1, \nu$  et  $-\nu$ .

Si  $q > 0$ , considérons  $\Delta \cdot F = A_F \oplus B_F$ . On a  $\Delta \cdot \Psi^{-1} = I_q \oplus 2I_1 \oplus M(\epsilon^3 - \epsilon^2)$ . La relation  $\Delta \cdot F = (\Delta P(A, \mathfrak{f}) \Delta^{-1})(\Delta \cdot \Psi^{-1})$  montre alors que  $A_F = A(I_q \oplus 2I_1)$  et que  $B_F = M(\mathfrak{f}(\epsilon^3 - \epsilon^2))$ . Par suite  $\det(A_F) = \pm 2$  et  $A$  est de la forme  $\begin{pmatrix} C & 2b \\ 2b' & 2d \end{pmatrix}$ . D'après l'argumentation donnée au §3.5 (cas  $R = I_1 \oplus X_3$ , p. 17), pour  $1 \leq q+1 \leq 6$ , il existe  $Q_1 \in \mathbf{GL}_{q+1}(\mathbf{Z})$  tel que  $Q_1 \cdot A = B \oplus (\pm 2I_2)$  et nécessairement  $Q_1 \in \Gamma_0^{q+1,1}$ . Comme  $P(Q_1, 1) \in C_R$ , on peut supposer que  $A = B \oplus (\pm 2I_2)$  et finalement tous les types associés à  $R$  sont scindés.

$d$	$FF^\vee$	$F$	type réel
1	$I_5$	$I_{p,5-p}$	$I_{p,5-p}$
2	$I_{3,2}$	$I_{p,3-p}J_2$	$I_{p,3-p}J_2$
	$I_{1,4}$	$\pm I_1J_4$	$\pm I_1J_2^2$
	$I_1R_2R_2$	$\pm I_1F_4$	$I_{2,1}J_2$
4	$I_1J_2J_2$	$\pm I_1K_4$	$\pm I_1P_{2;4,1}P_{2;4,1}^-$
		$\pm I_1L_4$	$\pm I_1P_{2;4,1}^2$
		$\pm I_1^-L_4$	$\pm I_1^-P_{2;4,1}^2$
		$\pm I_2X_3$	$\pm I_3P_{2;4,1}^-$
		$\pm I_2G_3^-$	$\pm I_{2,1}P_{2;4,1}$
		$\pm I_2H_3$	$\pm I_3P_{2;4,1}$
		$\pm I_2^-H_3$	$\pm I_{1,2}P_{2;4,1}$
	$I_2^-X_3$	$\pm U_2G_3$	$\pm I_{2,1}P_{2;4,1}^-$
		$\pm U_2H_3$	$\pm I_{2,1}P_{2;4,1}$
		$\pm J_2G_3$	$\pm J_2I_1P_{2;4,1}^-$
		$\pm J_2H_3$	$\pm J_2I_1P_{2;4,1}$
	$X_5$	$\pm F_5^*$	$\pm I_1P_{2;8,1}^-P_{2;8,3}$
		$\pm G_5^*$	$\pm I_1P_{2;8,1}P_{2;8,3}^-$
		$\pm H_5^*$	$\pm I_1P_{2;8,1}^-P_{2;8,3}$
		$\pm K_5^*$	$\pm I_1P_{2;8,1}P_{2;8,3}$

TABLE 4 – Types isoduaux principaux de rang 5 (44 principaux)

À nouveau, les types sont distingués par leurs composantes réelles et au besoin par la parité de leur composante symétrique (voir proposition 3.5). Par exemple,  $I_2G_3^-$  et  $U_2H_3$  ont le même type réel  $[I_{2,1}P_{2;4,1}]$  mais leur composantes symétriques équivalent respectivement à  $(\mathbf{Z}^3, x^2 + y^2 - 2z^2)$  et à  $(\mathbf{Z}^3, 2xy + 2z^2)$ .

### 3.7 Types algébriques principaux de rang 6

À conjugaison près dans  $\mathbf{GL}_6(\mathbf{Z})$ , il y a 39 éléments  $R$  d'ordre  $2^k$  et de déterminant 1 (table 16). On peut écarter les  $R$  qui contiennent un seul facteur  $R_2$ ,  $J_2$ ,  $X_3^-$ ,  $X_4$ ,  $Z_4$ ,  $Z_4'$ ,  $Z_4''$  ou  $X_5^-$  car  $\det(F)$  est divisible par 2 pour toute solution de  $F = RF'$  (certains cas relèvent aussi de la proposition 3.4 et ex. 3.9). De même on peut éliminer  $J_2J_2J_2$  et  $X_6$ . Les types associés à  $I_{p,q}$ ,  $I_{p,q}J_2J_2$  ou  $I_{1,2}X_3$  sont connus ou scindés. Il en est de même pour  $I_3X_3$  (§3.5, cas  $I_1X_3$ ,



p. 17) qui donne 10 types et pour  $I_1 X_5$  (§3.6, cas  $X_5$ , p. 21) avec 2 relations

$$[I_1 \oplus (-F_5)] = [(-I_1) \oplus G_5] \quad \text{et} \quad [I_1 \oplus (-H_5)] = [(-I_1) \oplus K_5]. \quad (20)$$

Ces relations sont obtenues grâce à  $P(Q, 1)$  où  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  (notation du cas  $R = X_5$ ) et on trouve seulement 12 types (table 5). Il ne reste plus qu'à examiner  $I_2^\pm R_2 R_2$ ,  $X_3 X_3$ ,  $X_3^- X_3^-$  et  $Y_6$ .

**Cas où  $R = I_2 \oplus R_2 \oplus R_2$  (ordre 2).** Soit  $F \in \mathbf{GL}_6(\mathbf{Z})$  une solution de  $F = RF'$  et soit  $A_F$  la composante symétrique de  $F$  (équations (17) et (18)). On sait (§3.6) que la décomposition de Jordan 2-adique de  $A_F$  est de la forme  $f_1 \oplus 2f_2$ , avec  $f_2$  paire de rang 2. La forme  $A_F$  appartient donc l'un des genres  $\mathbf{I}_{r,s}(2_{\mathbf{II}}^2)$ ,  $\mathbf{II}_{r,s}(2_{\mathbf{II}}^2)$  ou  $\mathbf{II}_{r,s}(2_{\mathbf{II}}^{-2})$  avec  $r+s=4$  (cf. [CS99, pp. 386-387]). Les deux premiers genres sont indéfinis, respectivement représentés par l'unique forme  $I_{p,q} \oplus 2U_2$  ou  $U_2 \oplus 2U_2$  à équivalence près. Le genre  $\mathbf{II}_{r,s}(2_{\mathbf{II}}^{-2})$  ( $r+s=4$ ) est défini car  $r-s \equiv 0 \pmod{8}$ ; dans ce cas, d'après [KZ72], la forme  $A_F$  réalise le maximum de l'invariant d'Hermite en dimension 4 et est équivalente  $\pm D_4$ , avec

$$D_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Grâce au lemme 3.11, on peut supposer (voir §3.6) que  $A_F = A \oplus 2U_2$  avec  $\det(A) = \pm 1$  auquel cas le type  $[F]$  est scindé, ou bien que  $A_F = \pm D_4$  qui conduit au type indécomposable  $\pm F_6$  (voir table 5).

**Cas où  $R = (-I_2) \oplus R_2 \oplus R_2$  (ordre 2).** Plus généralement, considérons  $R = I_q \oplus (-I_2) \oplus R_2 \oplus R_2$  ( $q \geq 0$ ). En posant  $\alpha = (1, 1)$ ,  $\beta = (1, -1)$ , on a

$$P = \begin{pmatrix} T & 0 & v\alpha & w\alpha \\ 0 & U & v_1\beta & w_1\beta \\ \alpha'x' & \beta'x'_1 & V & W \\ \alpha'y' & \beta'y'_1 & X & Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} A & 0 & b\alpha & c\beta \\ 0 & \Omega & b_1\beta & c_1\beta \\ \alpha'b' & -\beta'b'_1 & d(I_2 + R_2) & fI_2 + gR_2 \\ \alpha'c' & -\beta'c'_1 & gI_2 + fR_2 & e(I_2 + R_2) \end{pmatrix},$$

avec  $A, T \in M_q(\mathbf{Z})$  et  $A$  symétrique,  $\Omega, U \in M_2(\mathbf{Z})$  et  $\Omega$  antisymétrique,  $b, c, v, w, x, y \in \mathbf{Z}^q$ ,  $b_1, c_1, v_1, w_1, x_1, y_1 \in \mathbf{Z}^2$ ,  $d, e, f, g \in \mathbf{Z}$  et  $V, W, X, Y$  polynômes en  $R_2$ . La matrice  $\Delta = [I_q \oplus (U_2 \otimes I_2) \oplus I_2](I_{q+2} \oplus \Delta_4)$  (voir équation (13)) vérifie  $\Delta R \Delta^{-1} = I_{q+2,4}$ ,  $\det(\Delta) = 4$ ,  $\Delta C_R \Delta^{-1} = \Gamma^{q+2,4}$  (voir lemme 3.11) et  $\Delta \cdot F = A_F \oplus B_F$  avec

$$A_F = \begin{pmatrix} A & 2b & 2c \\ 2b' & 4d & 2(f+g) \\ 2c' & 2(f+g) & 4e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_F = \begin{pmatrix} \Omega & -2b_1 & 2c_1 \\ 2b'_1 & 0 & 2g-2f \\ -2c'_1 & 2f-2g & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Les entiers  $\det(A_F)$  et  $\det(B_F)$  sont divisibles par 4, donc valent  $\pm 4$ . Comme au §3.6 (cas  $I_q \oplus R_2 \oplus R_2$ , p. 20) on prouve que  $\det(A)$  est impair et que la  $A_F$  appartient à l'un des genres  $\mathbf{I}_{r,s}(2_{\mathbf{II}}^2)$ ,  $\mathbf{II}_{r,s}(2_{\mathbf{II}}^2)$  ou  $\mathbf{II}_{r,s}(2_{\mathbf{II}}^{-2})$ .

Si  $q = 0$ , la classe de  $B_F$  détermine  $[F]$ . En effet, il existe  $Q_2 \in \mathbf{GL}_4(\mathbf{Z})$  tel que  $Q_2 \cdot B_F = J_2 \oplus 2J_2$  ([Bou59, §5 n° 1]). Nécessairement  $Q_2 \in \Gamma_0^{4,2}$  et (lemme 3.11) il existe  $Q_1 \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$  tel que  $\Delta^{-1}(Q_1 \oplus Q_2)\Delta \in C_R$ . Ainsi on peut supposer que  $B_F = J_2 \oplus 2J_2$  :  $F$  est scindé et  $[F] = [J_2 \oplus F_4]$ .

**Cas où  $R = X_3 \oplus X_3$  (ordre 4).** Pour  $\Delta = (I_1 \oplus R_3 \oplus I_2)(\Delta_3 \oplus \Delta_3)$  (voir équation (13)) on a  $\Delta R \Delta^{-1} = I_2 \oplus J_2 \oplus J_2$ . Si  $P \in C_R$ , alors  $\Delta P \Delta^{-1} = Q_1 \oplus Q_2$  où  $Q_1 \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$  et  $Q_2$  s'identifie à un élément  $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$  (après choix de  $(1, i)$  comme  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathbf{Z}[i]$ ) ; de plus  $Q_1 \equiv \text{Ré } \mathfrak{P} + \text{Im } \mathfrak{P} \pmod{2}$ . Dans ces conditions nous posons  $P = P(Q_1, \mathfrak{P})$ . Cela étant, la matrice  $\Psi = \Psi_3 \oplus \Psi_3$  avec

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

vérifie  $\Psi R = R^\vee \Psi$ ,  $\Psi^\vee \Psi = R$  et  $P(Q_1, \mathfrak{P})^\sigma = \Psi^{-1} P(Q_1, \mathfrak{P})' \Psi = P(Q_1', \mathfrak{P}^*)$ . Soit  $F$  une solution inversible de  $F = RF'$ . En posant  $F\Psi = P(A, \mathfrak{F}) \in C_R$ , l'équation (11) se traduit par  $A = A'$  et  $\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^* = 0$  ; l'action de  $P = P(Q_1, \mathfrak{P})$  est donnée par  $PP(A, \mathfrak{F})P^\sigma = P(Q_1 \cdot A, \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{F})$  où  $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{F} = \mathfrak{P}\mathfrak{F}\mathfrak{P}^*$ . On a  $i\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \beta & d \end{pmatrix}$  avec  $(a, d) \in \mathbf{Z}^2$  et  $ad - |\beta|^2 = \pm 1$ . Si  $ad = 0$ , alors  $i\mathfrak{F}$  est équivalente – comme forme hermitienne – à  $U_2$  ou à  $I_{1,1}$  selon que  $a + d$  est pair ou impair (voir par exemple la preuve du lemme 3.10 pour le premier cas). Sinon, en supposant les termes diagonaux toujours non nuls, on se ramène par un procédé standard de réduction (voir §3.5, cas  $R = J_2 \oplus J_2$ ) à  $\sqrt{2}|\beta| \leq |a| \leq |d|$ , c.-à-d. à  $|a| = |d| = 1$  et  $\beta = 0$ . Finalement  $i\mathfrak{F}$  est équivalente à  $\pm I_2$ ,  $I_{1,1}$  ou  $U_2$ .

**Lemme 3.12.** *L'application qui à  $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$  associe  $\text{Ré } \mathfrak{P} + \text{Im } \mathfrak{P} \pmod{2}$  définit un morphisme surjectif  $\Theta$  de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$  sur  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ .*

*Preuve.* Posons  $\Theta_0(\mathfrak{P}) = \text{Ré } \mathfrak{P} + \text{Im } \mathfrak{P}$  pour  $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$ . On a  $\Theta_0(I_2) = I_2$  et  $\Theta_0(\mathfrak{P})\Theta_0(\mathfrak{Q}) - \Theta_0(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = 2 \text{Im } \mathfrak{P} \text{Im } \mathfrak{Q}$  (noter que  $|\det(\mathfrak{P})|^2 \equiv \det(\Theta_0(\mathfrak{P}))^2 \pmod{2}$ ). Enfin, la surjectivité est évidente.

Il résulte de ce lemme que le morphisme naturel de  $C_R$  dans  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$  est surjectif : si  $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$ , la matrice  $Q_1$  des restes modulo 2 de  $\Theta_0(\mathfrak{P})$  est inversible. On peut donc supposer que  $i\mathfrak{F} = \pm I_2$ ,  $I_{1,1}$  ou  $U_2$ . Puisque  $F\Psi = P(A, \mathfrak{F}) \in C_R$ , on a  $A \equiv i\mathfrak{F} \pmod{2}$  et il existe  $Q_1 \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$  telle que  $Q_1 \cdot A = U_2$  si  $i\mathfrak{F} = U_2$ ,  $Q_1 \cdot A = I_{p,q}$  ( $p + q = 2$ ) dans les autres cas. On vérifie ensuite que le morphisme  $\Theta$  du lemme 3.12 est encore surjectif en restriction au groupe  $\mathcal{I}$  des isométries hermitiennes de  $U_2$  (par exemple  $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{I}$ ). Quand  $A$  est paire ( $i\mathfrak{F} = U_2$ ), la matrice  $Q_1$  se complète ainsi en  $P(Q_1, \mathfrak{P}) \in C_R$  avec  $\mathfrak{P} \in \mathcal{I}$  ; on trouve un seul type (indécomposable) représenté par  $G_6 = \begin{pmatrix} 0 & G_3 \\ G_3 & 0 \end{pmatrix}$  vérifiant  $G_6\Psi = P(U_2, -iU_2)$ . Quand  $A$  est impaire,  $Q_1$  se complète de même en  $P(Q_1, \mathfrak{P}) \in C_R$  avec  $\mathfrak{P}$  isométrie hermitienne de  $\mathfrak{F}$ , par exemple  $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \end{pmatrix}$  pour  $i\mathfrak{F} = I_{1,1}$  et  $Q_1 \equiv U_2 \pmod{2}$  – les autres cas sont évidents. On peut donc supposer que  $A$  et  $\mathfrak{F}$  sont diagonales, ce qui donne 9 types (suivant les classes de  $A$  et  $\mathfrak{F}$ ), tous scindés (table 5). Cela implique l'existence d'une relation :

$$[H_3 \oplus (-H_3)] = [G_3 \oplus (-G_3)], \quad (23)$$

l'équivalence étant donnée par  $P(I_2, \mathfrak{P})$  avec  $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ .

**Cas où  $R = (-X_3) \oplus (-X_3)$  (ordre 4).** Par rapport au cas précédent, il suffit de changer le signe de  $R$ . On cherche donc  $F\Psi = P(A, \mathfrak{F}) \in C_R$  avec  $A$  antisymétrique et  $\mathfrak{F}$  hermitienne, en particulier  $A$  et  $\mathfrak{F}$  sont « paires ». Nécessairement  $A = \pm J_2$  et (lemme) on peut supposer que  $A = J_2$ . Comme la réduction modulo 2 de  $\mathbf{Sp}_2(\mathbf{Z}) = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$  dans  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  est surjective, on peut supposer aussi que  $\mathfrak{F} = U_2$ . Cela conduit à un seul type (indécomposable) représenté par  $H_6 = \begin{pmatrix} 0 & H_3 \\ -H_3 & 0 \end{pmatrix}$  (pour lequel  $A = J_2$  et  $\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ).

$d$	$FF^\vee$	$F$	type réel
1	$I_6$	$I_{p,6-p}$ $U_6$	$I_{p,6-p}$ $I_{3,3}$
2	$I_6^-$ $I_{4,2}$ $I_{2,4}$ $I_2 R_2 R_2$ $I_2^- R_2 R_2$	$J_6$ $I_{p,4-p} J_2$ $U_4 J_2$ $I_{p,2-p} J_4$ $U_2 J_4$ $I_{p,2-p} F_4$ $U_2 F_4$ $\pm F_6^*$ $J_2 F_4$	$J_2^3$ $I_{p,4-p} J_2$ $I_{2,2} J_2$ $I_{p,2-p} J_2^2$ $I_{1,1} J_2^2$ $I_{p+1,3-p} J_2$ $I_{2,2} J_2$ $\pm I_4 J_2$ $I_{1,1} J_2^2$
4	$I_2 J_2 J_2$ $I_2^- J_2 J_2$ $I_3 X_3$ $I_{2,1} X_3$ $X_3 X_3$ $X_3^- X_3^-$	$I_{p,2-p} K_4$ $I_{p,2-p} L_4$ $I_{p,2-p} L_4^-$ $U_2 K_4$ $\pm U_2 L_4$ $J_2 K_4$ $\pm J_2 L_4$ $I_{p,3-p} G_3$ $I_{p,3-p} G_3^-$ $\pm I_3 H_3$ $\pm J_2 I_1 G_3$ $\pm J_2 I_1 H_3$ $\pm J_2 I_1 G_3^-$ $\pm (G_3 G_3)$ $\pm G_3 H_3$ $\pm H_3 H_3$ $\pm G_3 H_3^-$ $G_3 G_3^-$ $G_6^*$ $H_6^*$	$I_{p,2-p} P_{2;4,1} P_{2;4,1}^-$ $I_{p,2-p} P_{2;4,1}^2$ $I_{p,2-p} P_{2;4,1}^{-2}$ $I_{1,1} P_{2;4,1} P_{2;4,1}^-$ $\pm I_{1,1} P_{2;4,1}^2$ $J_2 P_{2;4,1} P_{2;4,1}^-$ $\pm J_2 P_{2;4,1}^2$ $I_{p+1,3-p} P_{2;4,1}^-$ $I_{p,4-p} P_{2;4,1}$ $\pm I_4 P_{2;4,1}$ $\pm J_2 I_2 P_{2;4,1}^-$ $\pm J_2 I_2 P_{2;4,1}$ $\pm J_2 I_{1,1} P_{2;4,1}$ $\pm I_2 P_{2;4,1}^{-2}$ $\pm I_2 P_{2;4,1} P_{2;4,1}^-$ $\pm I_2 P_{2;4,1}^2$ $\pm I_{1,1} P_{2;4,1}^{-2}$ $I_{1,1} P_{2;4,1} P_{2;4,1}^-$ $I_{1,1} P_{2;4,1} P_{2;4,1}$ $J_2 P_{2;4,1} P_{2;4,1}^-$
8	$I_1 X_5$ $Y_6$	$\pm I_1 F_5$ $\pm I_1 F_5^-$ $\pm I_1 G_5$ $\pm I_1 H_5$ $\pm I_1 H_5^-$ $\pm I_1 K_5$ $\pm K_6^*$ $\pm L_6^*$ $\pm M_6^*$ $\pm N_6^*$	$\pm I_2 P_{2;8,1} P_{2;8,3}$ $\pm I_{1,1} P_{2;8,1} P_{2;8,3}^-$ $\pm I_2 P_{2;8,1} P_{2;8,3}$ $\pm I_2 P_{2;8,1} P_{2;8,3}^-$ $\pm I_{1,1} P_{2;8,1} P_{2;8,3}$ $\pm I_2 P_{2;8,1} P_{2;8,3}$ $\pm P_{2;4,1} P_{2;8,1} P_{2;8,3}^-$ $\pm P_{2;4,1} P_{2;8,1} P_{2;8,3}$ $\pm P_{2;4,1} P_{2;8,1} P_{2;8,3}^-$ $\pm P_{2;4,1} P_{2;8,1} P_{2;8,3}$

TABLE 5 – Types isoduaux principaux de rang 6 (88 principaux)

**Cas où  $R = Y_6$  (ordre 8).** Soit  $\epsilon$  une racine primitive 8-ième de l'unité, soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers du corps cyclotomique  $\mathbf{Q}[\epsilon]$  muni de la  $\mathbf{Z}$ -base  $(1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3)$  et soit  $M(\alpha)$  la matrice de la multiplication par  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Considérons

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a  $\Psi R = R^\vee \Psi$ ,  $\det(\Delta) = 2$ ,  $\Delta R \Delta^{-1} = J_2 \oplus X_4$  et  $\Delta P \Delta^{-1} = (\frac{p}{q} \bar{p}^q) \oplus M(\theta)$  pour  $P \in C_R$ , avec  $p + iq \in \mathbf{Z}[i]^\times$  et  $\theta \in \mathcal{O}^\times$ . Posons  $P = P(p + iq, \theta)$ . Le commutant  $C_R$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}[i]^\times \times \mathcal{O}^\times$  et l'involution  $\sigma$  correspond à la conjugaison :  $P(z, \theta)^\sigma = P(\bar{z}, \bar{\theta})$ . Sachant que  $\Psi^\vee \Psi = P(i, -\epsilon^3)$ , la relation (11) page 13 montre que les solutions inversibles de  $F = RF'$  sont données par  $F\Psi = P(a, \mathfrak{f})$  avec  $a = \pm 1$  et  $\mathfrak{f}$  unité réelle de  $\mathcal{O}$ . Comme pour le cas de  $X_5$  (voir §3.6), on se ramène à  $\mathfrak{f} = \pm 1$  ou  $\pm\eta = \pm(1 - \epsilon + \epsilon^3)$ , ce qui conduit à 8 types indécomposables  $\pm K_6, \pm L_6, \pm M_6, \pm N_6$  (voir équation (70), annexe) correspondant respectivement à  $a = \pm 1$  et  $\mathfrak{f} = 1, -1, \eta$  et  $-\eta$ .

### 3.8 Types algébriques principaux de rang 7

Dans  $\mathbf{GL}_7(\mathbf{Z})$  les classes de conjugaison d'ordre  $2^k$  et de déterminant 1 sont au nombre de 72 (table 16). On a  $\det(F) \equiv 0 \pmod{2}$  si  $F = RF'$  dans les cas suivants :  $R$  contient un seul facteur  $R_2, J_2, X_3^-$ , ou contient un facteur  $X_4, Z_4, Z_4', Z_4'', X_5^-, R_2 R_2 R_2, J_2 J_2 J_2, X_6, X_7, Y_7, Z_7'$  ou  $Z_7''$  (voir aussi la proposition 3.4 et l'exemple 3.9). Les types associés à  $I_{p,q}$  ( $q > 0$ ),  $I_{p,q} J_2 J_2$ ,  $I_{2,2} X_3, I_4^- X_3, I_1 X_3^- X_3^-, I_2^- X_5$  et  $I_1 Y_6$  sont scindés (proposition 3.4), de même que  $I_4 X_3$  (§3.5, cas  $I_1 X_3$ , p. 17) et  $I_2 X_5$  (§3.6, cas  $X_5$ , p. 21). Il reste à traiter  $I_3 R_2 R_2, I_{1,2} R_2 R_2, I_1 X_3 X_3, R_2 R_2 X_3, J_2 J_2 X_3$  et  $Z_7$ .

**Cas où  $R = I_3 \oplus R_2 \oplus R_2$  (ordre 2).** Reprenons les notations du §3.6 p. 20 qui traite partiellement ce cas. La composante symétrique  $A_F$  de  $F$  est donnée par l'équation (18), dans laquelle  $\det(A)$  est impair. Comme  $A$  est une matrice symétrique  $3 \times 3$ , cela entraîne que l'un des termes diagonaux de  $A$  est impair. La forme  $A_F$  est donc de type impair et appartient au genre  $\mathrm{I}_{r,s}(2_{\mathrm{II}}^2)$  (la décomposition de Jordan 2-adique de  $A_F$  est précisée au §3.6). Si  $A_F$  est définie, d'après [KZ77] ( $\gamma_5 = 2^{3/5}$ ) elle représente  $\pm 1$  sauf si elle est équivalente à la forme paire  $D_5$ , ce qui est exclu. Dans le cas indéfini, le genre  $\mathrm{I}_{r,s}(2_{\mathrm{II}}^2)$  ( $r + s = 5$ ) ne contient qu'une classe entière représentée par  $I_{r-1,s-1} \oplus 2U_2$ . Dans tout les cas  $A_F$  représente  $\pm 1$  et on peut supposer (§3.6 *ibid.*) que  $A_F = (\pm I_1) \oplus B$  : les types associés à  $R$  sont tous scindés. Noter l'existence d'une relation, à savoir

$$[I_3 \oplus F_4] = [(-I_1) \oplus F_6], \quad (24)$$

qui provient de l'équivalence entre les formes  $I_3 \oplus U_2$  et  $(-I_1) \oplus D_4$ .

**Cas où  $R = I_{1,2} \oplus R_2 \oplus R_2$  (ordre 2).** D'après l'étude faite au §3.7 (cas  $I_2^- \oplus R_2 \oplus R_2$ , p. 23) la composante symétrique  $A_F$  de  $F$  est de la forme (21) avec  $A$  scalaire impair. Ainsi, on a  $A_F \in \mathrm{I}_{r,s}(2_{\mathrm{II}}^2)$ , genre forcément indéfini pour  $r + s = 3$  (cf. [CS99, p. 387]). Il existe donc un élément  $Q_1 \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{Z})$  tel que

$Q_1 \cdot A_F = (\pm I_1) \oplus 2U_2$  qui représente  $I_{r,s}(2_{II}^2)$  ( $r + s = 3$ ). Nécessairement on a  $Q_1 \in \Gamma_0^{3,2}$  et  $Q_1$  se complète en un élément de  $\Gamma^{3,4}$  (lemme 3.11), groupe isomorphe au commutant  $C_R$ . Finalement on peut supposer  $A_F = (\pm I_1) \oplus 2U_2$  et tous les types associés à  $R$  sont scindés.

**Cas où  $R = I_1 \oplus X_3 \oplus X_3$  (ordre 4).** Soit  $\Delta = (I_2 \oplus R_3 \oplus I_2)(I_1 \oplus \Delta_3 \oplus \Delta_3)$  (voir équation (13)). On a  $\Delta R \Delta^{-1} = I_3 \oplus J_2 \oplus J_2$ ; les éléments de  $C_R^\Delta$  sont de la forme  $Q_1 \oplus Q_2$  où  $Q_1 \in \Gamma_0^{3,2}$ ,  $Q_2$  s'identifie à un élément  $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$  et le bloc  $2 \times 2$  inférieur droit de  $Q_1$  est congru à  $\text{Re } \mathfrak{P} + \text{Im } \mathfrak{P}$  modulo 2. Soit  $A_F$  la composante symétrique de  $F$ . Comme au §3.6 (cas  $I_1 \oplus R_2 \oplus R_2$ ), on prouve que  $A_F$  appartient à l'un des genres  $I_{r,s}(2_I^2)$  ou  $I_{r,s}(2_{II}^2)$ ,  $r + s = 3$ . En utilisant la constante d'Hermite  $\gamma_3$  et [CS99, pp. 386-387] on voit que  $A_F$  représente  $\pm 1$  dans tous les cas. Par suite il existe  $Q_1 \in \Gamma_0^{3,2}$  tel que  $Q_1 \cdot A_F = (\pm I_1) \oplus 2B$  ( $\det(B) = \pm 1$ ). D'après le lemme 3.12,  $Q_1$  se complète en un élément de  $C_R^\Delta$  et tous les types associés à  $R$  sont scindés.

**Cas où  $R = R_2 \oplus R_2 \oplus X_3$  (ordre 4).** On prend  $\Delta = (I_2 \oplus R_3 \oplus I_2)(\Delta_4 \oplus \Delta_3)$  (équation (13)), matrice qui vérifie  $\Delta R \Delta^{-1} = I_{3,2} \oplus J_2$  et  $\det(\Delta) = 8$ . Posons  $\Delta \cdot F = A_F \oplus B_F \oplus C_F$ . On a alors

$$F = \begin{pmatrix} a(I_2 + R_2) & bI_2 + cR_2 & e\alpha' & 0 \\ cI_2 + bR_2 & d(I_2 + R_2) & f\alpha' & 0 \\ e\alpha & f\alpha & g & h\beta \\ 0 & 0 & hJ_2\beta' & h(I_2 + J_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (25)$$

$$A_F = 2 \begin{pmatrix} 2a & b+c & 2e \\ b+c & 2d & 2f \\ 2e & 2f & 2g-h \end{pmatrix},$$

avec  $\alpha = (1, 1)$ ,  $\beta = (1, 0)$  et  $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbf{Z}$ . De plus  $B_F = 2(c - b)J_2$  et  $C_F = h(I_2 + J_2)$ . On voit ainsi que  $\det(A_F/2) = \pm 1$ ,  $b - c = \pm 1$  et  $h = \pm 1$ . Un calcul modulo 2 montre que toute équivalence entre  $A_F$  et  $A^0$  de la forme (25) s'écrit  $Q_1 = \begin{pmatrix} U & V \\ W & x \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbf{Z})$  avec  $V$  et  $W$  divisibles par 2. Il existe alors  $Q_2 \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$  congrue à  $U$  modulo 2 et dans ces conditions, on vérifie que  $Q_1 \oplus Q_2 \oplus I_2 \in C_R^\Delta$ . On pourra donc fixer arbitrairement  $A_F$ , pourvu qu'elle soit de la forme (25). Si  $A_F$  est indéfinie, on prend  $A^0/2 = U_2 \oplus (\pm I_1)$  qui conduit à 4 types scindés  $\pm(F_4 \oplus G_3)$ ,  $\pm(F_4 \oplus H_3)$ . Si  $A_F$  est définie (disons positive quitte à changer le signe de  $F$ ), posons

$$A^0 = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $\Phi$  est une isométrie de  $A^0$  telle que  $\Phi \oplus U_2 \oplus I_2 \in C_R^\Delta$  : on peut fixer  $b - c$  sans changer  $A^0$ . En fixant  $A_F = A^0$  (ci-dessus) et  $b - c = -1$ , on trouve deux matrices  $F_7$  et  $G_7$  selon que  $h$  vaut 1 ou  $-1$  (voir équation (71), annexe). Le cas où  $A_F$  est définie conduit donc à 4 types indécomposables  $\pm F_7$  et  $\pm G_7$ .

**Cas où  $R = J_2 \oplus J_2 \oplus X_3$  (ordre 4).** En posant  $\Delta = I_4 \oplus R_3^2 \Delta_3$  et  $\Psi = I_4 \oplus \Psi_3$  (équations (22) et (13)), on a  $\Delta R \Delta^{-1} = J_2 \oplus J_2 \oplus J_2 \oplus I_1$  et  $\Psi R = R^\vee \Psi$ . Soit  $\mathcal{O} = \mathbf{Z}[i]$ . Si  $P \in C_R$ , alors  $\Delta P \Delta^{-1} = \mathfrak{P} \oplus (\pm I_1)$  avec  $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_3(\mathcal{O})$ ; de plus, les coefficients  $\mathfrak{P}_{3,1}$  et  $\mathfrak{P}_{3,2}$  sont multiples de  $1 + i$ . Comme d'habitude nous

$d$	$FF^\vee$	$F$	type réel
1	$I_7$	$I_{p,7-p}$	$I_{p,7-p}$
2	$I_{5,2}$	$I_{p,5-p}J_2$	$I_{p,5-p}J_2$
	$I_{3,4}$	$I_{p,3-p}J_4$	$I_{p,3-p}J_2^2$
	$I_{1,6}$	$I_{p,1-p}J_6$	$I_{p,1-p}J_2^3$
	$I_3R_2R_2$	$I_{p,3-p}F_4$	$I_{p+1,4-p}J_2$
		$\pm I_1F_6$	$\pm I_5J_2$
	$I_{1,2}R_2R_2$	$\pm I_1J_2F_4$	$\pm I_{2,1}J_2^2$
4	$I_3J_2J_2$	$I_{p,3-p}K_4$	$I_{p,3-p}P_{2;4,1}P_{2;4,1}^-$
		$I_{p,3-p}L_4$	$I_{p,3-p}P_{2;4,1}^2$
		$I_{p,3-p}L_4^-$	$I_{p,3-p}P_{2;4,1}^{-2}$
	$I_{1,2}J_2J_2$	$\pm I_1J_2K_4$	$\pm I_1J_2P_{2;4,1}P_{2;4,1}^-$
		$\pm I_1J_2L_4$	$\pm I_1J_2P_{2;4,1}^2$
		$\pm I_1J_2L_4^-$	$\pm I_1J_2P_{2;4,1}^{-2}$
	$I_4X_3$	$I_{p,4-p}G_3$	$I_{p+1,4-p}P_{2;4,1}^-$
		$I_{p,4-p}G_3^-$	$I_{p,5-p}P_{2;4,1}$
		$\pm I_4H_3$	$\pm I_5P_{2;4,1}$
		$\pm U_4G_3$	$\pm I_{3,2}P_{2;4,1}^-$
		$\pm U_4H_3$	$\pm I_{3,2}P_{2;4,1}$
	$I_{2,2}X_3$	$\pm I_2J_2G_3$	$\pm I_3J_2P_{2;4,1}^-$
		$\pm I_2J_2G_3^-$	$\pm I_{2,1}J_2P_{2;4,1}$
		$\pm I_2J_2H_3$	$\pm I_3J_2P_{2;4,1}$
		$\pm I_2J_2H_3^-$	$\pm I_{2,1}J_2P_{2;4,1}^-$
		$\pm U_2J_2G_3$	$\pm I_{2,1}J_2P_{2;4,1}$
		$\pm U_2J_2H_3$	$\pm I_{2,1}J_2P_{2;4,1}$
	$I_4^-X_3$	$\pm J_4G_3$	$\pm I_1J_4P_{2;4,1}^-$
		$\pm J_4H_3$	$\pm I_1J_4P_{2;4,1}$
	$I_1X_3X_3$	$\pm I_1G_3G_3$	$\pm I_3P_{2;4,1}^{-2}$
		$\pm I_1G_3G_3^-$	$\pm I_{2,1}P_{2;4,1}P_{2;4,1}^-$
		$\pm I_1G_3^-G_3^-$	$\pm I_{1,2}P_{2;4,1}^2$
		$\pm I_1G_3H_3$	$\pm I_3P_{2;4,1}P_{2;4,1}^-$
		$\pm I_1G_3^-H_3$	$\pm I_{2,1}P_{2;4,1}^2$
		$\pm I_1H_3H_3$	$\pm I_3P_{2;4,1}^2$
		$\pm I_1G_6$	$\pm I_{2,1}P_{2;4,1}P_{2;4,1}^-$
		$\pm I_1H_6$	$\pm I_1J_2P_{2;4,1}P_{2;4,1}^-$
	$R_2R_2X_3$	$\pm F_4G_3$	$\pm I_{2,1}J_2P_{2;4,1}$
		$\pm F_4H_3$	$\pm I_{2,1}J_2P_{2;4,1}$
		$\pm F_7^*$	$\pm I_3J_2P_{2;4,1}$
		$\pm G_7^*$	$\pm I_3J_2P_{2;4,1}^-$
	$J_2J_2X_3$	$\pm K_4G_3$	$\pm I_1P_{2;4,1}P_{2;4,1}^{-2}$
		$\pm K_4H_3$	$\pm I_1P_{2;4,1}^2P_{2;4,1}^-$
		$\pm L_4^-G_3$	$\pm I_1P_{2;4,1}^{-3}$
		$\pm L_4H_3$	$\pm I_1P_{2;4,1}^3$

TABLE 6 – Types isoduaux principaux de rang 7 ( $t' = 166$ ) : ordre 1,2,4

écrivons  $P = P(\mathfrak{P}, \pm 1)$ . Les solutions inversibles de  $F = RF'$  sont données par  $F\Psi = P(\mathfrak{F}, \det F)$  avec

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & z \\ (1+i)z^* & if \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a(1-i) & \beta \\ -i\beta & d(1-i) \end{pmatrix},$$

$a, d$  et  $f \in \mathbf{Z}$ ,  $\beta \in \mathcal{O}$  et  $z \in \mathcal{O}^2$ . En développant le déterminant de  $\mathfrak{F}$  qui vaut  $\pm 1$ , on remarque que  $f|\beta|^2$  est impair. On vérifie également que  $z = 0$  correspond à un type scindé suivant  $J_2 \oplus J_2$  et  $X_3$ . L'action de  $P = P(\mathfrak{P}, \pm 1) \in C_R$  sur  $\mathfrak{F}$  se traduit par  $PF\Psi = P(\mathfrak{P}\mathfrak{F}\mathfrak{P}^\tau, \det F)$ , où  $\tau$  est l'anti-automorphisme défini comme suit :

$$\mathfrak{P}^\tau = \begin{pmatrix} \Omega^* & iw \\ -(1+i)v^* & \bar{u} \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \Omega & v \\ (1+i)w' & u \end{pmatrix},$$

avec  $u \in \mathcal{O}$ ,  $v, w \in \mathcal{O}^2$  et  $\Omega \in M_2(\mathcal{O})$ . Noter que  $\tau$  n'est pas involutif comme dans les autres cas – en fait  $\tau$  est d'ordre 8. Remarquons d'abord que l'élément  $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} I_2 & ifz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  transforme  $z$  en  $z(1-f^2)$  : si  $f = \pm 1$ , le type  $[F]$  est scindé. Nous allons montrer que l'on peut toujours se ramener à ce cas. Pour cela, considérons  $-i(\mathfrak{P}\mathfrak{F}\mathfrak{P}^\tau)_{3,3}$  qui définit à  $\mathfrak{F}$  fixée une forme hermitienne  $h_F$  en les variables  $u \in \mathcal{O}$  et  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^2$ , à savoir

$$h_F(u, w_1, w_2) = f|u|^2 + 2a|w_1|^2 + 2d|w_2|^2 + 2\operatorname{Ré}[(1+i)(uz^*\bar{w} + \beta w_1\bar{w}_2)].$$

On a  $\det(h_F) = 2\det(\mathfrak{F}) = \pm 2$ . Par ailleurs, la relation  $h_F(u, w_1, w_2) = \pm 1$  entraîne  $\operatorname{pgcd}(u, (1+i)w_1, (1+i)w_2) = 1$  et dans ces conditions, comme  $\mathcal{O}$  est principal, il existe  $\mathfrak{P} \in \mathbf{GL}_3(\mathcal{O})$  dont la troisième ligne est  $(u, (1+i)w_1, (1+i)w_2)$ . Pour conclure, il suffit donc de prouver que  $h_F$  représente 1 ou  $-1$ . Une base du  $\mathbf{Z}$ -module  $\mathcal{O}^3$  étant choisie, notons  $H_F^{\mathbf{Z}}$  la matrice de la forme quadratique  $h_F^{\mathbf{Z}}$  induite par  $h_F$  sur ce  $\mathbf{Z}$ -module. Sachant que  $f|\beta|^2$  est impair, on trouve une sous-matrice extraite de  $H_F^{\mathbf{Z}}$  de façon diagonale dont le déterminant est impair. D'après la relation (19),  $H_F^{\mathbf{Z}}$  est équivalente sur  $\mathbf{Z}_2$  à  $A \oplus 2B$  avec  $A$  inversible de rang 4 et  $B$  inversible paire. Par suite  $h_F^{\mathbf{Z}}$  appartient au genre  $\operatorname{I}_{r,s}(2_{\Pi}^2)$ . Dans le cas indéfini, ce genre comprend une seule classe d'équivalence ; la forme  $h_F^{\mathbf{Z}}$  est équivalente à  $I_{p,q} \oplus 2U_2$  avec  $(p, q) = (1, 3)$  ou  $(3, 1)$  (puisque  $\det(h_F^{\mathbf{Z}}) = \det(h_F)^2 = 4$ ) et  $h_F$  représente  $\pm 1$ .

Supposons maintenant que  $h_F$  soit définie, par exemple positive. Nous estimons le minimum de  $h_F$  grâce à un ensemble de Siegel pour  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ . Soit  $K = U(n)$ , soit  $A$  le sous-groupe des matrices diagonales à coefficients réels  $> 0$  et soit  $N$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes. On a la décomposition d'Iwasawa  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) = KAN$ . Si  $u$  et  $t$  sont des réels  $> 0$ , on note  $A_t$  l'ensemble des  $(a_{j,k}) \in A$  telles que  $a_{j,j} \leq ta_{j+1,j+1}$  ( $1 \leq j \leq n-1$ ),  $N_u$  l'ensemble des  $(n_{j,k}) \in N$  telles que  $|n_{j,k}| \leq u$  ( $1 \leq j < k \leq n$ ) et on pose  $\mathfrak{S}_{t,u} = KA_tN_u$  (ensemble de Siegel). Grâce à l'approximation des complexes par les éléments de  $\mathcal{O}$ , on prouve comme pour  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$  que  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) = \mathfrak{S}_{\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}}\mathbf{GL}_n(\mathcal{O})$  (cf. [Bor69, pp. 14-15]). En utilisant l'action transitive (ici à droite) de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$  sur les matrices hermitiennes  $> 0$ , on en déduit qu'il existe une base de  $\mathcal{O}^3$  dans laquelle les coefficients diagonaux de la matrice de  $h_F$  sont de la forme

$$\begin{cases} h_{1,1} = b_1 \\ h_{2,2} = b_2 + b_1|n_{1,2}|^2 \\ h_{3,3} = b_3 + b_2|n_{2,3}|^2 + b_1|n_{1,3}|^2 \end{cases}$$

avec  $0 < b_1 \leq 2b_2 \leq 4b_3$ ,  $|n_{j,k}|^2 \leq 1/2$  ( $j < k$ ) et  $b_1b_2b_3 = \det(h_F) = 2$ . L'inégalité  $b_1^3 \leq 16$  montre que  $b_1$  vaut 1 ou 2. Si le minimum de  $h_F$  était égal



à 2, on aurait  $b_1 = 2$ ,  $b_2 b_3 = 1$ ,  $b_3 \leq 1 \leq b_2 \leq \sqrt{2}$ , puis  $2 \leq h_{2,2} \leq \sqrt{2} + 1$ ,  $2 \leq h_{3,3} \leq 2 + \sqrt{2}/2$  et enfin  $h_{1,1} = h_{2,2} = h_{3,3} = 2$ , ce qui est absurde puisque  $h_F$  est impaire. Donc  $h_F$  représente 1 (en fait on pourrait montrer que  $H_F^{\mathbf{Z}}$  est équivalente à  $I_2 \oplus D_4$ ).

Finalement, les types associés à  $R$  sont tous scindés. On obtient seulement 8 types (table 6) car il y a deux relations :

$$[K_4 \oplus G_3] = [(-L_4) \oplus H_3] \quad \text{et} \quad [K_4 \oplus H_3] = [L_4 \oplus G_3].$$

Notons  $F_1, F_2, F_3, F_4$  ces 4 types et posons  $F_j \Psi = P(\mathfrak{F}_j, 1)$  ( $j = 1, \dots, 4$ ). Alors  $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{A} \oplus (-i)I_1$ ,  $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{B} \oplus iI_1$ ,  $\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{A} \oplus iI_1$ ,  $\mathfrak{F}_4 = -\mathfrak{F}_2$  où  $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ . Les relations précédentes proviennent de  $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{F}_1\mathfrak{P}^T$  et  $\mathfrak{F}_4 = \mathfrak{Q}\mathfrak{F}_3\mathfrak{Q}^T$  avec

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 0 & -i & -1 \\ 1+i & 1+i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ -1-i & 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

$d$	$FF^\vee$	$F$	type réel
8	$I_2 X_5$	$I_{p,2-p} F_5$	$I_{p+1,2-p} P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$I_{p,2-p} F_5^-$	$I_{p,3-p} P_{2,8,1} P_{2,8,3}^-$
		$I_{p,2-p} H_5$	$I_{p+1,2-p} P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$I_{p,2-p} H_5^-$	$I_{p,3-p} P_{2,8,1} P_{2,8,3}^-$
		$\pm I_2 G_5$	$\pm I_3 P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$\pm I_2 K_5$	$\pm I_3 P_{2,8,1} P_{2,8,3}^-$
		$\pm U_2 F_5$	$\pm I_{2,1} P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$\pm U_2 G_5$	$\pm I_{2,1} P_{2,8,1} P_{2,8,3}^-$
		$\pm U_2 H_5$	$\pm I_{2,1} P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$\pm U_2 K_5$	$\pm I_{2,1} P_{2,8,1} P_{2,8,3}^-$
	$I_2^- X_5$	$\pm J_2 F_5$	$\pm J_2 I_1 P_{2,8,1} P_{2,8,3}$
		$\pm J_2 G_5$	$\pm J_2 I_1 P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}^-$
		$\pm J_2 H_5$	$\pm J_2 I_1 P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$\pm J_2 K_5$	$\pm J_2 I_1 P_{2,8,1} P_{2,8,3}^-$
	$I_1 Y_6$	$\pm I_1 K_6$	$\pm I_1 P_{2,4,1} P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$\pm I_1 K_6^-$	$\pm I_1 P_{2,4,1}^- P_{2,8,1} P_{2,8,3}$
		$\pm I_1 L_6$	$\pm I_1 P_{2,4,1} P_{2,8,1} P_{2,8,3}$
		$\pm I_1 L_6^-$	$\pm I_1 P_{2,4,1}^- P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$\pm I_1 M_6$	$\pm I_1 P_{2,4,1} P_{2,8,1} P_{2,8,3}$
		$\pm I_1 M_6^-$	$\pm I_1 P_{2,4,1}^- P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$\pm I_1 N_6$	$\pm I_1 P_{2,4,1} P_{2,8,1} P_{2,8,3}$
		$\pm I_1 N_6^-$	$\pm I_1 P_{2,4,1}^- P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
	$Z_7$	$\pm H_7^*$	$\pm I_1 P_{2,4,1}^- P_{2,8,1} P_{2,8,3}$
		$\pm K_7^*$	$\pm I_1 P_{2,4,1}^- P_{2,8,1} P_{2,8,3}$
		$\pm L_7^*$	$\pm I_1 P_{2,4,1} P_{2,8,1}^- P_{2,8,3}$
		$\pm M_7^*$	$\pm I_1 P_{2,4,1} P_{2,8,1} P_{2,8,3}$

TABLE 7 – Types isoduaux principaux de rang 7 ( $t' = 166$ ), suite : ordre 8

**Cas où  $R = Z_7$  (ordre 8).** Soit  $\epsilon$  une racine primitive 8-ième de l'unité, soit  $\mathcal{O} = \mathbf{Z}[\epsilon]$  et pour  $\theta \in \mathcal{O}$ , soit  $M(\theta)$  la matrice de la multiplication par  $\theta$  dans la

base  $(1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3)$ . Posons

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a  $\Psi R = R^\vee \Psi$ ,  $\det(\Delta) = 16$  et  $\Delta R \Delta^{-1} = I_1 \oplus J_2 \oplus X_4$ . Si  $P \in C_R$ , alors  $\Delta P \Delta^{-1} = u I_1 \oplus \begin{pmatrix} v & -v^w \\ v^w & v \end{pmatrix} \oplus M(\theta)$  avec  $u = \pm 1$ ,  $\alpha = v + iw \in \mathbf{Z}[i]^\times$  et  $\theta = x + y\epsilon + z\epsilon^2 + t\epsilon^3 \in \mathcal{O}^\times$ ; de plus les relations  $v \equiv x + z \pmod{2}$ ,  $w \equiv y + t \pmod{2}$  et  $u \equiv v + w + 2(y + z) \pmod{4}$  caractérisent  $C_R^\Delta$  comme sous-groupe de  $\mathbf{Z}^\times \times \mathbf{Z}[i]^\times \times \mathcal{O}^\times$ . On voit que la projection de  $C_R^\Delta$  sur la composante  $\mathcal{O}^\times$  est surjective. Posons  $P = P(u, \alpha, \theta)$ . L'involution  $\sigma$  s'écrit  $P(u, \alpha, \theta)^\sigma = P(u, \bar{\alpha}, \bar{\theta})$ . Sachant que  $\Psi^\vee \Psi = R = P(1, -i, \epsilon)$ , la relation (11) page 13 montre que  $F\Psi = P(a, bi, f)$  avec  $a = \det(F) = \pm 1$ ,  $b^2 = 1$  et  $f \in \mathcal{O}^\times$  tel que  $f = \epsilon^2 \bar{f}$ . En utilisant l'unité fondamentale  $\eta = 1 - \epsilon + \epsilon^3$  et l'action de  $C_R$ , on se ramène à  $f = \pm \epsilon$  ou  $\pm \epsilon \eta^{-1} = \pm(1 - \epsilon + \epsilon^2)$ , ce qui conduit à 8 types indécomposables :  $H_7 = P(1, -i, \epsilon)$ ,  $K_7 = P(1, -i, -\epsilon)$ ,  $L_7 = P(1, i, \epsilon \eta^{-1})$ ,  $M_7 = P(1, i, -\epsilon \eta^{-1})$  et leurs opposés (équation (71), annexe).

## 4 Classification des types géométriques ( $n \leq 7$ )

### 4.1 Types réels. Aspects différentiels et métriques

Pour déterminer les types géométriques, c.-à-d. les matrices de Gram associées à un type algébrique, il sera commode d'utiliser des décompositions *réelles* des types isoduaux. Par extension du cas entier, nous introduisons la notion de *type réel* – on définirait de même la notion de type rationnel. Soit  $\mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  le sous-groupe de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$  formé des matrices de déterminant  $\pm 1$ .

**Définition 4.1.** (1) Un élément  $F \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  représente un type algébrique réel si  $FF^\vee$  est d'ordre fini. La classe d'équivalence de  $F$  sous l'action de  $\mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  est alors appelée *type algébrique réel*, noté  $[F]$ .

(2) Le *type géométrique réel* associé à un type algébrique réel  $[F]$  est la classe d'isométrie de  $V_F = \{A \in P_n; AF^\vee A = F\}$  dans l'espace  $P_n$  des matrices de Gram.

Si  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  représente un type isodual, les propriétés différentielles et géométriques (dimension, courbure, etc) de  $V_F$  ne dépendent que du type réel associé à  $F$ . Nous examinons ici les premières propriétés de  $V_F$  en considérant plus généralement  $F$  réel. La structure géométrique de  $V_F$  sera précisée au §4.2, théorème 4.11.

Considérons maintenant l'ensemble  $P_n$  des matrices symétriques positives de déterminant 1. Rappelons que la métrique

$$ds^2 = \text{Tr}(A^{-1}dA)^2 \quad (A \in P_n). \quad (26)$$

munit  $P_n$  d'une structure d'espace symétrique riemannien. De plus, le groupe  $\mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  agit isométriquement sur  $P_n$  par

$$P \cdot A = PAP' \quad (P \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R}), A \in P_n). \quad (27)$$

Nous appellerons *sous-espace symétrique de de  $P_n$*  toute sous-variété totalement géodésique, complète et connexe de  $P_n$ .

**Proposition 4.2.** *Soient  $V$  et  $W$  des sous-espaces symétriques de  $P_m$  et  $P_n$  respectivement. Alors*

a)  $V \oplus W = \{A \oplus B; A \in V, B \in W\}$  *est un sous-espace symétrique de  $P_{n+m}$  isométrique au produit riemannien  $V \times W$ .*

b)  $V \otimes W = \{A \otimes B; A \in V, B \in W\}$  *est un sous-espace symétrique de  $P_{mn}$  isométrique à la variété produit  $V \times W$  munie de la métrique*

$$ds_{V \otimes W}^2 = n ds_V^2 + m ds_W^2,$$

où  $ds_V^2$  et  $ds_W^2$  désignent les métriques de  $V$  et de  $W$ .

*Preuve.* On sait qu'une partie non vide de  $P_N$  est un sous-espace symétrique si et seulement si elle est fermée, connexe et stable par toutes les symétries centrées en ses points (voir [Bav05, lemme 2.10]). La symétrie  $s_A$  centrée en  $A \in P_N$  a pour expression  $s_A(B) = AB^{-1}A$  ( $B \in P_N$ ). Le cas de  $V \oplus W$  est immédiat (propriétés topologiques claires et calcul sur les blocs diagonaux). Ensuite, rappelons que  $A \otimes B = (a_{ij}B)_{1 \leq i, j \leq m}$  (matrice diagonale par blocs  $n \times n$ , où  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ ). Il s'agit évidemment d'une version matricielle du produit tensoriel des formes bilinéaires. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= AC \otimes BD, & I_m \otimes I_n &= I_{mn} \\ (A \otimes B)' &= A' \otimes B', & (A \otimes B)[u \otimes v] &= A[u]B[v], \\ \text{Tr}(A \otimes B) &= \text{Tr } A \text{Tr } B, & \det(A \otimes B) &= (\det A)^n (\det B)^m, \end{aligned} \quad (28)$$

avec  $A, C \in M_m(\mathbf{R})$ ,  $B, D \in M_n(\mathbf{R})$  et  $(u, v) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ . Par suite  $V \otimes W$  est bien inclus dans  $P_{mn}$  et « symétrique ». Montrons que  $V \otimes W$  est fermé dans  $P_{mn}$ . Soit  $A_k \otimes B_k = (a_{ij;k}B_k)_{ij}$  une suite qui converge vers  $M = (M_{ij})_{ij} \in P_{mn}$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ). En prenant le déterminant de chaque bloc, on trouve  $\lim_k a_{ij;k}^n = \det M_{ij}$ . Puisque  $M \in P_{mn}$  et  $A_k \in P_m$ , on a  $\det M_{1,1} > 0$  et  $a_{1,1;k} > 0$ ; par suite,  $(a_{1,1;k})_k$  converge vers un réel  $> 0$  et  $B_k$  converge vers une matrice  $B \in W$  ( $W$  est fermé dans  $M_n(\mathbf{R})$ ). Il en résulte que  $A_k$  converge vers une matrice  $A \in V$  ( $V$  est fermé dans  $M_m(\mathbf{R})$ ). Comme  $V \otimes W$  est clairement connexe, on conclut que c'est un sous-espace symétrique. Concernant l'aspect métrique, on a d'après (28)

$$(A \otimes B)^{-1} d(A \otimes B) = A^{-1} dA \otimes I_n + I_m \otimes B^{-1} dB,$$

d'où le résultat (on rappelle que  $\text{Tr}(A^{-1}dA) = \text{Tr}(B^{-1}dB) = 0$ ).

**Proposition 4.3.** *Soit  $[F]$  un type algébrique réel (définition 4.1). Alors l'ensemble  $V_F = \{A \in P_n; AF^\vee A = F\}$  est non vide et c'est un sous-espace symétrique de  $P_n$ .*

*Preuve.* La non vacuité de  $V_F$  résulte de l'argument donné en 2.2 (théorème du point fixe d'Élie Cartan). On a une application  $\tau$  de  $P_n$  dans un sous-espace symétrique  $W_n$  de  $P_{2n}$  (voir 2.2 et 2.3) et  $V_F$  correspond *via*  $\tau$  au lieu fixe d'un groupe fini d'isométries de  $W_n$ . De plus (voir équation (4), p. 7), on a  $\text{Tr}(\tau_A^{-1} d\tau_A)^2 = 2 \text{Tr}(A^{-1} dA)^2$  ( $A \in P_n$ ). Le plongement  $\tau$  est donc isométrique (à un facteur près), d'où le résultat.

Si  $[F]$  est un type algébrique réel, on pose

$$\mathbf{O}(F) = \{P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}); P'FP = F\}$$

(sous-groupe de  $\mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$ ) et  $\mathbf{SO}_F(\mathbf{R}) = \mathbf{O}_F(\mathbf{R}) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ .

**Proposition 4.4.** *Soit  $[F]$  un type algébrique réel. Alors  $V_F$  est une orbite du groupe  $\mathbf{SO}_F^t(\mathbf{R})$  (transposé du groupe  $\mathbf{SO}_F(\mathbf{R})$ ).*

*Preuve.* Il est immédiat de vérifier que  $V_F$  est stable par l'action de  $\mathbf{O}_F^t(\mathbf{R})$ . La transitivité de  $\mathbf{SO}_F^t(\mathbf{R})$  résulte du lemme suivant.

**Lemme 4.5.** *Soient  $U_1, U_2 \in \mathbf{O}(n)$ . On suppose qu'il existe  $P \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$  tel que  $U_2 = PU_1P'$ . Alors  $U_1$  et  $U_2$  sont conjuguées par un élément de  $\mathbf{SO}(n)$ .*

En effet soit  $A = PP' \in P_n$  ( $P \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ ). Il est clair que  $A \in V_F$  si et seulement si la matrice  $U_P = P^{-1}FP^\vee$  est orthogonale (c.-à-d.  $U_P = U_P^\vee$ ). Fixons un point  $A_0 = P_0P_0' \in V_F$  et posons  $U_0 = U_{P_0}$ , puis

$$\mathcal{P}_{P_0, F} = \{P \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{R}); PU_0P' = F\} = \{P \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{R}); PP_0^{-1} \in \mathbf{SO}_F^t(\mathbf{R})\}.$$

L'ensemble  $\{PP'; P \in \mathcal{P}_{P_0, F}\}$  est l'orbite de  $A_0$  sous l'action de  $\mathbf{SO}_F^t(\mathbf{R})$ , incluse dans  $V_F$  (d'après le début de la preuve). Maintenant si  $A = PP' \in V_F$ , on a  $U_P = (P^{-1}P_0)U_0(P^{-1}P_0)'$ . D'après le lemme 4.5 il existe  $U \in \mathbf{SO}(n)$  tel que  $U_P = UU_0U^{-1}$ . Posons  $Q = PU$  : alors  $PP' = QQ'$  et  $QU_0Q' = PU_PP' = F$ , donc  $Q \in \mathcal{P}_{P_0, F}$ . Ce qui montre que  $V_F = \{PP'; P \in \mathcal{P}_{P_0, F}\}$ ; c'est donc une orbite de  $\mathbf{SO}_F^t(\mathbf{R})$ .

*Preuve du lemme 4.5.* Rappelons que deux éléments de  $\mathbf{O}(n)$  sont conjugués dans  $\mathbf{O}(n)$  si et seulement si ils ont le même polynôme caractéristique. En particulier deux matrices orthogonales conjuguées dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$  le sont aussi dans  $\mathbf{O}(n)$ . Comme  $U_i \in \mathbf{O}(n)$  ( $i = 1, 2$ ), on a  $U_2^2 = U_2U_2^\vee = PU_1U_1^\vee P^{-1} = PU_1^2P^{-1}$ . Par suite, il existe  $U \in \mathbf{O}(n)$  tel que  $U_2^2 = UU_1^2U^{-1}$ . Le polynôme caractéristique des  $U_i^2$  s'écrit

$$\chi_{U_1^2} = \chi_{U_2^2} = (X - 1)^a (X + 1)^b \prod_{j=1}^k (X^2 - 2\cos(\theta_j)X + 1)^{m_j},$$

avec  $a + b + 2\sum_{j=1}^k m_j = n$ , les  $\theta_j$  étant mutuellement distincts et choisis dans  $]0, \pi[$ . On a  $U_1^2 = (U^{-1}P)U_1^2(U^{-1}P)^{-1}$  et  $U_1^2 = (U^{-1}P)'U_1^2(U^{-1}P)^\vee$ ; les sous-espaces  $E_+ = \ker(U_1^2 - I)$ ,  $E_- = \ker(U_1^2 + I)$  et  $E_j = \ker(U_1^4 - 2\cos(\theta_j)U_1^2 + I)$  ( $1 \leq j \leq k$ ) sont donc stables par  $U^{-1}P$  et par  $(U^{-1}P)'$ . Ils sont également stables par  $U_3 = U^{-1}U_2U$ , qui vérifie  $U_3 = (U^{-1}P)U_1(U^{-1}P)'$ . En remplaçant  $U_2$  par  $U_3$  et  $P$  par  $U^{-1}P$ , on est donc ramené au cas où  $\mathbf{R}^n = E_+$ ,  $E_-$  ou  $E_j$  (pour un  $j = 1, \dots, k$ ).

*Cas où  $\mathbf{R}^n = \ker(U_1^2 - I)$ .* On a  $U_i^2 = I$ , donc  $U_i' = U_i$  ( $i = 1, 2$ ). Soient  $p_i = \dim(\ker(U_i - I))$  et  $q_i = \dim(\ker(U_i + I))$  ( $i = 1, 2$ ). Le couple  $(p_i, q_i)$  est la signature de  $U_i$  comme forme bilinéaire symétrique. Puisque  $U_2 = PU_1P'$ , on a  $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$  et les  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont conjuguées dans  $\mathbf{O}(n)$ . On peut choisir la conjugaison directe.

*Cas où  $\mathbf{R}^n = \ker(U_1^2 + I)$ .* Les  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont antisymétriques de carré  $-I$ . Comme  $\chi_{U_1} = \chi_{U_2} = (X^2 + 1)^{n/2}$ , il existe un élément  $V \in \mathbf{O}(n)$  tel que  $U_2 = VU_1V^{-1} = VU_1V'$ . En comparant les Pfaffiens

$$\text{Pf}(U_2) = \det(V) \text{Pf}(U_1) = \det(P) \text{Pf}(U_1),$$

on voit que  $\det(V) = \det(P)$ .

Cas où  $\mathbf{R}^n = \ker(U_1^4 - 2\cos(\theta)U_1^2 + I)$  ( $\theta \in ]0, \pi[$ ). Le polynôme caractéristique de  $U_i$  est de la forme

$$\chi_{U_i} = (X^2 - 2\cos(\theta/2)X + 1)^{p_i} (X^2 + 2\cos(\theta/2)X + 1)^{q_i} \quad (i = 1, 2).$$

Le couple  $(2p_i, 2q_i)$  s'interprète comme la signature de la forme bilinéaire symétrique  $U_i + U'_i$ . Puisque  $U_2 + U'_2 = P(U_1 + U'_1)P'$ , on a  $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$  et il existe  $V \in \mathbf{O}(n)$  tel que  $U_2 = VU_1V^{-1} = VU_1V'$ . Les matrices antisymétriques  $U_i - U'_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont de rang maximal ( $\theta/2 \in ]0, \pi/2[$ ) et vérifient  $U_2 - U'_2 = V(U_1 - U'_1)V' = P(U_1 - U'_1)P'$ . En comparant les Pfaffiens (voir ci-dessus), on trouve  $\det(V) = \det(P)$ .

**Proposition 4.6** (critère de Mahler pour les réseaux isoduaux). *Soit  $[F]$  un type algébrique entier et soit  $\mathbf{SO}_F^t(\mathbf{Z}) = \mathbf{O}_F^t(\mathbf{R}) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$ . Alors l'application*

$$\mathbf{SO}_F^t(\mathbf{Z}) \backslash V_F \rightarrow \mathbf{SL}_n(\mathbf{Z}) \backslash P_n$$

*est propre et à fibres finies. En particulier on a un critère de Mahler dans l'espace  $\mathbf{SO}_F^t(\mathbf{Z}) \backslash V_F$  des réseaux isoduaux de type  $[F]$ .*

*Preuve.* C'est une application directe de la proposition 2.1 de [Bav05] p. 222. Sachant que  $V_F$  est une orbite de  $\mathbf{SO}_F^t(\mathbf{R})$  (proposition 4.4), il suffit de vérifier que ce groupe est « pseudo-algébrique » au sens de [Bav05, définition 2.1], ce qui est immédiat. En effet soit  $\varphi : \mathbf{SL}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{GL}(M_n(\mathbf{C}))$  la représentation usuelle ( $\varphi(P) \cdot X = PXP'$ ). Le réseau  $M_n(\mathbf{Z})$  est stable par  $\varphi(\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z}))$  et par définition  $P \in \mathbf{SO}^t(\mathbf{R})$  si et seulement si  $\varphi(P)$  fixe le vecteur  $F \in M_n(\mathbf{Z})$ .

Pour  $P \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$ , notons  $\Phi_P$  l'endomorphisme de  $\text{Sym}_n(\mathbf{R})$  (matrices symétriques) défini par

$$\Phi_P(X) = P \cdot X = PXP' \quad (X \in \text{Sym}_n(\mathbf{R})).$$

Soit  $[F]$  un type algébrique réel et soit  $A \in V_F$ . L'espace tangent  $T_A V_F$  est l'ensemble des  $X \in \text{Sym}_n(\mathbf{R})$  tels que  $AF^\vee X + XF^\vee A = 0$ , c'est-à-dire

$$T_A V_F = \ker(\Phi_{AF^\vee} + \text{Id}).$$

On remarquera que, d'après la proposition 4.4, les endomorphismes  $\Phi_{AF^\vee}$  quand  $A$  décrit  $V_F$  sont tous conjugués. En effet pour  $A, B \in V_F$ , il existe  $P \in \mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$  tel que  $P \cdot F = F$  et  $P \cdot A = B$ ; on a alors  $\Phi_{BF^\vee} = \Phi_P \Phi_{AF^\vee} \Phi_P^{-1}$ . Noter également que  $\Phi_{AF^\vee}$  coïncide sur  $V_F$  avec la symétrie géodésique centrée au point  $A$  (laquelle est donnée par  $\sigma_A(B) = AB^{-1}A$  pour  $B \in P_n$ ). Ainsi, les symétries de l'espace symétrique  $V_F$  sont données par des applications linéaires.

Soit  $u \in \mathbf{R}$  et soit  $l_u^F$  la restriction à  $V_F$  de la fonction longueur  $l_u$  définie sur  $P_n$  par  $l_u(A) = A[u]$  ( $A \in P_n$ ).

**Proposition 4.7** (Espace tangent. Gradients des longueurs). *Soit  $[F]$  un type algébrique réel tel que  $\dim V_F \geq 1$ , soit  $A \in V_F$  et soit  $u \in \mathbf{R}$ . Alors*

a) *le polynôme minimal de  $\psi_{A,F}$  se met sous la forme  $(x+1)f(x)$  avec  $f \in \mathbf{R}[x]$  tel que  $f(-1) \neq 0$  et on a*

$$T_A V_F = \text{Im } f(\Phi_{AF^\vee}),$$

b) le gradient (pour la métrique (26)) de  $l_u^F$  au point  $A$  est donné par

$$\nabla_A l_u^F = \frac{1}{f(-1)} f(\Phi_{AF^\vee})(Auu'A).$$

*Preuve.* Observons d'une part que  $\Phi_{AF^\vee}$  est d'ordre fini (car  $\Phi_{AF^\vee}^2 = \Phi_{FF^\vee}$ ) et d'autre part que  $\Phi_{AF^\vee}$  est une isométrie pour le produit scalaire défini par  $\langle X, Y \rangle_A = \text{Tr}(A^{-1}XA^{-1}Y)$  sur  $\text{Sym}_n(\mathbf{R})$ . Le polynôme minimal de  $\Phi_{AF^\vee}$  est donc à racines simples, d'où l'assertion a). Ensuite, on a la décomposition orthogonale  $\text{Sym}_n(\mathbf{R}) = T_A V_F \oplus \text{Im}(\Phi_{AF^\vee} + \text{Id})$ . En écrivant  $f = (x+1)g + f(-1)$  où  $g \in \mathbf{R}[x]$ , on voit que la projection orthogonale (pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ) sur  $T_A V_F$  vaut  $f(\Phi_{AF^\vee})/f(-1)$ , d'où l'assertion b).

*Remarque 4.8.* Le polynôme  $f$  ne dépend que de  $F$  puisque tous les  $\Phi_{AF^\vee}$  ( $A \in V_F$ ) sont conjugués. De plus, on voit que les éléments donnés par la proposition 4.7 (paramétrage de l'espace tangent et gradients) se calculent sans avoir à expliciter la sous-variété  $V_F$ .

## 4.2 Composantes des types géométriques

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des couples d'entiers  $(k, l) \in \mathbf{N}^{*2}$  tels que  $\text{pgcd}(k, l) = 1$  et  $1 \leq l < \max(3, k)/2$ . Considérons les polynômes

$$\begin{cases} \Psi_{1,1} = x - 1, & \Psi_{2,1} = x + 1 \text{ et} \\ \Psi_{k,l} = x^2 - 2 \cos(2l\pi/k)x + 1 & ((k, l) \in \mathcal{E}, k \geq 3). \end{cases} \quad (29)$$

**Proposition 4.9.** (décomposition canonique d'un type algébrique réel)

Soit  $F \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  tel que  $R = FF^\vee$  soit d'ordre fini  $d$ . Pour tout  $(k, l) \in \mathcal{E}$  avec  $k$  diviseur de  $d$  on pose  $W_{k,l}(F) = \ker \Psi_{k,l}(R^\vee)$ . Alors

- a) la somme des  $W_{k,l}(F)$  est directe et égale à  $\mathbf{R}^n$ ,
- b) cette somme directe  $\bigoplus W_{k,l}(F)$  est  $F$ -orthogonale bilatère,
- c) les classes d'équivalence des  $\mathbf{R}$ -modules bilinéaires  $(W_{k,l}(F), F)$  sont des invariants du type réel  $[F]$ .

*Preuve.* On procède comme pour la preuve du cas entier (proposition 3.5, p. 12).

*Remarque 4.10.* Si  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  représente un type isodual, ses composantes réelles sont évidemment des invariants de la classe entière  $[F]$ .

Soit  $[F]$  un type algébrique réel. Par un choix convenable d'une base adaptée à la décomposition canonique  $\mathbf{R}^n = \bigoplus_{k,l} W_{k,l}(F)$  (proposition 4.9), on voit que  $F$  est  $\mathbf{GL}_n^\pm$ -équivalente à une matrice décomposée  $\bigoplus_{k,l} F_{k,l}$  avec  $|\det F_{k,l}| = 1$ . Les types réels  $[F_{k,l}]$  ne dépendent que de  $[F]$  et seront appelés *composantes canoniques de  $[F]$* . On a

$$[F] = \bigoplus_{k,l} [F_{k,l}] \quad \text{avec} \quad \chi_{F_{k,l}F_{k,l}^\vee} = \Psi_{k,l}^{m_{k,l}(F)} \quad ((k, l) \in \mathcal{E}), \quad (30)$$

où  $m_{k,l}(F)$  est la multiplicité de  $\Psi_{k,l}$  comme facteur de  $\chi_{FF^\vee}$ . Les  $m_{k,l}(F)$  sont presque tous nuls.

**Théorème 4.11** (structure des types géométriques). *Soit  $[F]$  un type algébrique réel et soient  $(F_{k,l})$  des représentants des composantes canoniques de  $[F]$ , comme ci-dessus. Alors l'espace symétrique  $V_F$  est isométrique au produit riemannien  $\prod_{k,l} V_{F_{k,l}}$  (indexé par les  $(k,l) \in \mathcal{E}$  tels que  $m_{k,l}(F) > 0$ ) et il existe  $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ ,  $g \in \mathbf{N}$  et  $(p_{k,l}, q_{k,l}) \in \mathbf{N}^2$  ( $(k,l) \in \mathcal{E}$ ,  $k \geq 3$ ) tels que*

$$\begin{cases} V_{F_{1,1}} \simeq \mathbf{SO}_0(p,q)/\mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q) & (p+q = m_{1,1}(F)), \\ V_{F_{2,1}} \simeq \mathbf{Sp}_{2g}(\mathbf{R})/\mathbf{U}(g) & (2g = m_{2,1}(F)), \\ V_{F_{k,l}} \simeq \mathbf{SU}(p_{k,l}, q_{k,l})/\mathbf{S}(\mathbf{U}(p_{k,l}) \times \mathbf{U}(q_{k,l})) & (k \geq 3, p_{k,l} + q_{k,l} = m_{k,l}(F)). \end{cases}$$

**Définition 4.12.** Soit  $\mathcal{E}^H = \{(k,l) \in \mathcal{E}; k \geq 3\}$ . Si  $[F]$  est un type algébrique réel de rang  $n$ . La famille

$$((p,q); g; (p_{k,l}, q_{k,l})_{(k,l) \in \mathcal{E}^H})$$

exhibée dans le théorème 4.11 est appelée *signature* de  $[F]$ . Noter que le rang  $n$  de  $[F]$  vérifie la relation  $n = p + q + 2g + 2 \sum_{(k,l) \in \mathcal{E}^H} (p_{k,l} + q_{k,l})$ . Les espaces symétriques  $V_{F_{1,1}}$ ,  $V_{F_{2,1}}$  et  $V_{F_{k,l}}$  ( $k \geq 3$ ) du théorème 4.11 sont appelés respectivement *composante symétrique*, *composante alternée* et *composantes hermitiennes* de  $V_F$ .

**Corollaire 4.13.** *Soit  $[F]$  un type réel de signature  $((p,q); g; (p_{k,l}, q_{k,l})_{(k,l) \in \mathcal{E}^H})$ . Alors la dimension de l'espace symétrique  $V_F$  est donnée par*

$$\dim V_F = pq + g(g+1) + 2 \sum_{(k,l) \in \mathcal{E}^H} p_{k,l} q_{k,l}.$$

*Preuve du théorème 4.11.* On peut supposer que  $F = \oplus_{k,l} F_{k,l}$ , somme indexée par les couples  $(k,l) \in \mathcal{E}$  tels que  $m_{k,l} = m_{k,l}(F) > 0$ . Par suite (voir preuve de l'assertion b), proposition 3.4 p. 12), on a  $V_F = \{\oplus A_{k,l}; A_{k,l} \in V_{F_{k,l}}\}$ . Comme l'ensemble des matrices diagonales par blocs

$$\bigoplus_{j=1}^N P_{n_j} = \{\oplus_{j=1}^N A_j; A_j \in P_{n_j}, 1 \leq j \leq N\} \subset P_n \quad \left( \sum_{j=1}^N n_j = n \right)$$

donne un plongement isométrique du produit riemannien  $\prod_{j=1}^N P_{n_j}$  dans  $P_n$  (proposition 4.2-a), on voit que  $V_F$  est isométrique au produit des  $V_{F_{k,l}}$ . On est donc ramené à l'étude des composantes, c'est-à-dire au cas où le polynôme minimal de  $R = FF^\vee$  vaut  $\mu_R = \Psi_{k,l}$  pour un  $(k,l) \in \mathcal{E}$ .

Si  $\mu_R = x+1$ , alors  $F$  est symétrique et on peut prendre  $F = I_{p,q}$  ( $p+q = n$ ). On a  $\mathbf{O}_F(\mathbf{R}) = \mathbf{O}_F^t(\mathbf{R}) = \mathbf{O}(p,q)$  et  $V_F$  est une orbite de la composante neutre  $\mathbf{SO}_0(p,q)$  (prop 4.4). En considérant la matrice identité  $I_n \in V_F$ , on trouve que  $V_F \simeq \mathbf{SO}_0(p,q)/\mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q)$ . Si  $\mu_R = x+1$ , alors  $F$  est équivalente à  $J_{2g}$  ( $2g = n$ ) et un argument analogue montre que  $V_F \simeq \mathbf{Sp}_{2g}(\mathbf{R})/\mathbf{U}(g)$ .

Supposons maintenant que  $\mu_R = \Psi_{k,l}$  pour un  $(k,l) \in \mathcal{E}$  avec  $k \geq 3$ . Quitte à conjuguer, on peut supposer que  $R = R(2\pi l/k) \oplus \dots \oplus R(2\pi l/k)$  ( $m_{k,l}$  termes) avec

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La sous-algèbre  $\mathcal{C}_R$  de  $M_n(\mathbf{R})$  des matrices qui commutent avec  $R$  coïncide avec le commutant de la structure complexe  $R(\pi/2) \oplus \dots \oplus R(\pi/2)$ . Soit  $m = n/2$ . Il est clair que l'application  $\kappa : M_m(\mathbf{C}) \rightarrow M_n(\mathbf{R})$  définie par

$$\kappa(Z) = \left( \begin{pmatrix} \operatorname{Ré} z_{i,j} & -\operatorname{Im} z_{i,j} \\ \operatorname{Im} z_{i,j} & \operatorname{Ré} z_{i,j} \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i,j \leq m} \quad (Z = (z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in M_m(\mathbf{C})) \quad (31)$$



(matrice formée de blocs  $2 \times 2$ ) induit un isomorphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres de  $M_m(\mathbf{C})$  sur  $\mathcal{C}_R$ . Pour tout  $Z \in M_m(\mathbf{C})$ , en posant  $Z^* = \overline{Z}'$ , on a

$$\kappa(Z^*) = \kappa(Z)', \quad \det(\kappa(Z)) = |\det(Z)|^2 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\kappa(Z)) = \text{Tr}(Z) + \text{Tr}(Z^*).$$

Revenons à la détermination de  $V_F$ . Compte tenu de  $R^\vee = R$ , on vérifie aisément que  $F \in \mathcal{C}_R$  et que  $V_F$ ,  $\mathbf{O}_F(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{O}_F^t(\mathbf{R})$  sont inclus dans  $\mathcal{C}_R$  (en particulier  $\mathbf{O}_F(\mathbf{R}) = \mathbf{SO}_F(\mathbf{R})$ ). Pour  $M \in \mathcal{C}_R$ , posons  $M_{\mathbf{C}} = \kappa^{-1}(M) \in M_m(\mathbf{C})$ . La relation  $F = RF'$  s'écrit dans  $M_m(\mathbf{C})$  sous la forme  $e^{-i\pi l/k} F_{\mathbf{C}} = (e^{-i\pi l/k} F_{\mathbf{C}})^*$ . Par suite, il existe  $(p, q) \in \mathbf{N}^2$  ( $p + q = m$ ) et  $Q \in \mathbf{GL}_m(\mathbf{C})$  (avec  $|\det Q| = 1$ ) tels que  $Q(e^{-i\pi l/k} F_{\mathbf{C}})Q^* = I_{p,q}$ . On peut donc supposer que  $F_{\mathbf{C}} = e^{i\pi l/k} I_{p,q}$ , c'est-à-dire

$$F = I_{p,q} \otimes R_{\pi l/k} = R_{\pi l/k} \oplus \dots \oplus R_{\pi l/k} \oplus (-R_{\pi l/k}) \dots \oplus (-R_{\pi l/k}). \quad (32)$$

Dans ces conditions, on a  $P \in \mathbf{SO}_F^t(\mathbf{R})$  si et seulement si  $P_{\mathbf{C}} \in \mathbf{U}(p, q)$  et le type géométrique est alors donné, d'après la proposition 4.4, par

$$V_F = \{\kappa(UU^*); U \in \mathbf{U}(p, q)\} \simeq \mathbf{SU}(p, q)/\mathbf{S}(\mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(q)).$$

*Remarque 4.14.* La preuve précédente (voir aussi proposition 3.4, assertion c)) montre que la composante neutre du groupe  $\mathbf{O}_F(\mathbf{R})$  est isomorphe à un produit de groupes de la forme  $\mathbf{SO}_0(p, q)$ ,  $\mathbf{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$  ou  $\mathbf{U}(p, q)$ . On notera que la dimension du noyau de l'action de  $\mathbf{O}_F^t(\mathbf{R})$  sur  $V_F$  est égale au nombre de composantes hermitiennes de  $V_F$ .

Une autre conséquence de la preuve du théorème 4.11 est la détermination des types algébriques réels (voir notamment (32)). Posons

$$P_{2;k,l} = \begin{pmatrix} \cos \pi l/k & -\sin \pi l/k \\ \sin \pi l/k & \cos \pi l/k \end{pmatrix} \quad ((k, l) \in \mathcal{E}^H). \quad (33)$$

**Proposition 4.15** (classification des types algébriques réels). *Soit  $[F]$  un type algébrique réel et soit  $((p, q); g; (p_{k,l}, q_{k,l})_{(k,l) \in \mathcal{E}^H})$  la signature de  $[F]$ . On a alors la décomposition*

$$[F] = p[I_1] \oplus q[-I_1] \oplus g[J_2] \bigoplus_{(k,l) \in \mathcal{E}^H} (p_{k,l}[P_{2;k,l}] \oplus q_{k,l}[-P_{2;k,l}]).$$

*Deux types algébriques réels sont équivalents si et seulement si ils ont la même signature.*

En particulier tout type réel  $F$  de rang 2 avec  $FF^\vee$  d'ordre  $k$  est équivalent à  $\pm I_2$  ou  $I_{1,1}$  si  $k = 1$ , à  $J_2$  si  $k = 2$  et à  $\pm P_{2;k,l}$  ( $(k, l) \in \mathcal{E}^H$ ) si  $k \geq 3$ . Ces types réels admettent des représentants entiers uniquement pour  $k = 1, 2$  et 6 ( $P_{2;6,1}$  est équivalent à  $F_2$ ).

### 4.3 Paramétrage des types géométriques

Soit  $\mathbf{G}$  l'un des groupes  $\mathbf{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{SO}_0(p, q)$  ou  $\mathbf{SU}(p, q)$  et soit  $\mathbf{K}$  un compact maximal de  $\mathbf{G}$ . Il est bien connu (voir ci-dessous) que l'espace symétrique  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  associé à  $\mathbf{G}$  est isomorphe comme espace homogène à un ouvert  $\Omega_{\mathbf{G}}$  d'un

espace numérique. Nous obtenons ainsi, *via* le théorème 4.11, un paramétrage des matrices de Gram des réseaux isoduaux. En effet, soit  $V_{F_{k,l}}$  une composante isomorphe à  $\mathbf{G}/\mathbf{K}$  (voir théorème 4.11). Alors le choix de points bases respectifs dans  $\Omega_{\mathbf{G}}$  et  $V_{F_{k,l}}$  définit, grâce à l'action de  $\mathbf{G}$ , un plongement équivariant d'image  $V_{F_{k,l}}$  de  $\Omega_{\mathbf{G}}$  dans l'espace des matrices de Gram.

La composante alternée sera paramétrée par l'espace de Siegel  $\mathfrak{H}_g$ . Rappelons que  $\mathfrak{H}_g = \{Z = X + iY; X, Y \in \text{Sym}_g(\mathbf{R}), Y > 0\}$  et que le groupe symplectique  $\mathbf{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$  agit sur  $\mathfrak{H}_g$  par homographies :

$$P \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad (P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{Sp}_{2g}(\mathbf{R}), Z \in \mathfrak{H}_g). \quad (34)$$

Soit  $\mathfrak{S}_g = V_{J_{2g}} = \{A \in P_{2g}; AJ_{2g}A = J_{2g}\}$ . On obtient un plongement équivariant  $\sigma_g : \mathfrak{H}_g \rightarrow P_{2g}$  d'image  $\mathfrak{S}_g$  en posant  $\sigma_g(P \cdot iI) = PP'$  :

$$\sigma_g(X + iY) = \begin{pmatrix} Y + XY^{-1}X & XY^{-1} \\ Y^{-1}X & Y^{-1} \end{pmatrix} \quad (X + iY \in \mathfrak{H}_g), \quad \mathfrak{S}_g = \sigma_g(\mathfrak{H}_g). \quad (35)$$

Noter que la métrique induite sur  $\mathfrak{H}_g$  par la métrique riemannienne (26) de  $P_{2g}$  est donnée par

$$ds^2 = 2 \text{Tr}(Y^{-1}dXY^{-1}dX + Y^{-1}dYY^{-1}dY) \quad (X + iY \in \mathfrak{H}_g). \quad (36)$$

Passons à la composante symétrique. Posons  $V_{p,q} = V_{I_{p,q}}$ . Soit  $(p, q)$  avec  $p > 0, q > 0$  et soit  $\mathbf{R}^{p,q}$  l'espace  $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$  ( $n = p + q$ ) muni de la forme usuelle de signature  $(p, q)$ . Le groupe  $\mathbf{SO}_0(p, q)$  agit sur la grassmannienne  $\mathcal{G}_{p,q}^-$  des sous-espaces négatifs de dimension  $q$  de  $\mathbf{R}^{p,q}$  et on a  $\mathcal{G}_{p,q}^- \simeq \mathbf{SO}_0(p, q)/\mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q)$ . En remarquant que tout élément de  $\mathcal{G}_{p,q}^-$  admet une unique base de la forme  $(\begin{smallmatrix} X \\ I_q \end{smallmatrix})$  avec  $X'X - I_q < 0$ , on voit que  $\mathcal{G}_{p,q}^-$  est isomorphe à

$$\mathcal{V}_{p,q} = \{X \in M_{p,q}(\mathbf{R}); X'X - I_q < 0\} \quad (37)$$

muni de l'action de  $\mathbf{SO}_0(p, q)$  par homographies analogue à (34). En choisissant comme points bases  $0 \in \mathcal{V}_{p,q}$  (correspondant à  $\{0\} \times \mathbf{R}^q \in \mathcal{G}_{p,q}^-$ ) et  $I_n \in \mathcal{V}_{p,q}$ , on trouve un plongement équivariant  $\varphi_{p,q}$  de  $\mathcal{V}_{p,q}$  dans  $P_n$  d'image  $V_{p,q}$  :

$$\begin{cases} \varphi_{p,q}(X) = \begin{pmatrix} (I + XX')(I - XX')^{-1} & 2X(I - X'X)^{-1} \\ 2(I - X'X)^{-1}X' & (I + X'X)(I - X'X)^{-1} \end{pmatrix} & (X \in \mathcal{V}_{p,q}), \\ V_{p,q} = \varphi_{p,q}(\mathcal{V}_{p,q}). \end{cases} \quad (38)$$

La métrique riemannienne induite par ce plongement est donnée par

$$ds^2 = 8 \text{Tr}[(1 - XX')^{-1}dX(1 - X'X)^{-1}dX'] \quad (X \in \mathcal{V}_{p,q}). \quad (39)$$

*Remarque 4.16.* Pour  $q = 1$ , à partir de  $(I - XX')^{-1} = I + XX'(1 - X'X)^{-1}$ , on voit que la métrique induite  $ds^2$  sur  $\mathcal{V}_{n-1,1}$  vérifie

$$\frac{ds^2}{8} = \frac{1}{(1 - |X|^2)^2}((1 - |X|^2)|dX|^2 + (X'dX)^2) \quad (|X|^2 = X'X < 1). \quad (40)$$

Il s'agit de la métrique hyperbolique exprimée dans le modèle de Klein. La métrique induite sur  $V_{n-1,1}$  est à courbure constante  $-1/8$ .

Il peut être commode de paramétrer  $V_{n-1,1}$  par le demi-espace supérieur en composant le plongement  $\varphi_{n-1,1}$  avec une isométrie entre le demi-espace et le modèle de Klein (et de même pour d'autres modèles). Par exemple, pour  $n = 3$  :

$$\frac{1}{(\Im z)^2} \begin{pmatrix} 2(\Re z)^2 + (\Im z)^2 & (|z|^2 - 1)\Re z & (|z|^2 + 1)\Re z \\ (|z|^2 - 1)\Re z & \frac{1}{2}(|z|^4 + 1) - (\Re z)^2 & \frac{1}{2}(|z|^4 - 1) \\ (|z|^2 + 1)\Re z & \frac{1}{2}(|z|^4 - 1) & \frac{1}{2}(|z|^4 + 1) + (\Re z)^2 \end{pmatrix} \quad (\Im z > 0), \quad (41)$$

paramétrage que l'on peut aussi construire directement à partir de l'isomorphisme classique entre  $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{SO}_0(2, 1)$ .

Enfin pour le groupe  $\mathbf{SU}(p, q)$  et les composantes hermitiennes, on a une description analogue à  $\mathbf{SO}_0(p, q)$  à partir de la grassmannienne des sous-espaces négatifs de dimension  $q$  de l'espace hermitien standard de signature  $(p, q)$ . Comme dans le cas réel, cette grassmannienne s'identifie à

$$\mathcal{W}_{p,q} = \{Z \in M_{p,q}(\mathbf{C}); Z^*Z - I_q < 0\} \quad (42)$$

muni de l'action de  $\mathbf{SU}(p, q)$  par homographies et on trouve, *via* les matrices hermitiennes et le morphisme d'algèbres  $\kappa$  (voir équation (31)), un plongement équivariant de  $\mathcal{W}_{p,q}$  dans  $P_n$  ( $n = 2(p + q)$ ) d'image  $W_{p,q} = \kappa(\{PP^*; P \in \mathbf{SU}(p, q)\})$ , avec

$$W_{p,q} = \kappa \left( \left\{ \begin{pmatrix} (I + ZZ^*)(I - ZZ^*)^{-1} & 2Z(I - Z^*Z)^{-1} \\ 2(I - Z^*Z)^{-1}Z^* & (I + Z^*Z)(I - Z^*Z)^{-1} \end{pmatrix}; Z \in \mathcal{W}_{p,q} \right\} \right). \quad (43)$$

Quant à la métrique induite sur  $\mathcal{W}_{p,q}$ , elle s'exprime (compte tenu notamment de  $\mathrm{Tr} \kappa(W) = \mathrm{Tr} W + \mathrm{Tr} W^*$ ) par

$$ds^2 = 16 \mathrm{Tr}[(1 - ZZ^*)^{-1}dZ(1 - Z^*Z)^{-1}dZ^*]. \quad (44)$$

Nous utiliserons essentiellement le cas particulier  $(p, q) = (1, 1)$ , soit

$$W_{1,1} = \left\{ \frac{1}{1 - |z|^2} \begin{pmatrix} 1 + |z|^2 & 0 & 2\Re z & -2\Im z \\ 0 & 1 + |z|^2 & 2\Im z & 2\Re z \\ 2\Re z & 2\Im z & 1 + |z|^2 & 0 \\ -2\Im z & 2\Re z & 0 & 1 + |z|^2 \end{pmatrix}; |z| < 1 \right\},$$

que l'on peut aussi paramétrer par le demi-plan de Poincaré  $\mathfrak{H}_1$  :

$$W_{1,1} = \left\{ \frac{1}{2y} \begin{pmatrix} 1 + |z|^2 & 0 & |z|^2 - 1 & 2x \\ 0 & 1 + |z|^2 & -2x & |z|^2 - 1 \\ |z|^2 - 1 & -2x & 1 + |z|^2 & 0 \\ 2x & |z|^2 - 1 & 0 & 1 + |z|^2 \end{pmatrix}; z = x + iy \in \mathfrak{H}_1 \right\}. \quad (45)$$

*Remarque 4.17.* En petite dimension, il existe des isomorphismes entre certains groupes symplectiques réels, orthogonaux ou unitaires. Les types géométriques correspondants, muni de la métrique induite par  $P_n$ , sont homothétiques car copies du même espace symétrique irréductible. Ainsi, grâce aux isomorphismes  $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{SO}_0(2, 1) \simeq \mathbf{PSU}(1, 1)$ , chacune des familles  $\mathfrak{S}_g$ ,  $V_{p,q}$  et  $W_{p,q}$  contient un plan à courbure constante négative :  $\mathfrak{S}_1$ ,  $V_{2,1}$  et  $W_{1,1}$ , de courbure respective  $-1/2$ ,  $-1/8$  et  $-1/4$  (voir (36), (40) et (44)). Les types  $V_{3,2}$  et  $\mathfrak{S}_2$  (isomorphisme  $\mathbf{SO}_0(3, 2) \simeq \mathbf{PSL}_4(\mathbf{R})$ ) sont homothétiques (avec un rapport de  $\sqrt{2}$ ) mais pas isométriques. Enfin, les types  $W_{2,2}$  et  $V_{4,2}$  (isomorphisme  $\mathbf{SO}_0(4, 2) \simeq \mathbf{SU}(2, 2)/\{\pm I_4\}$ ) sont isométriques, au moins abstraitement.

Pour paramétrer un type géométrique  $V_F$ , il suffit de scinder  $F$  comme type réel, c'est-à-dire trouver  $P \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  tel que  $F = P \cdot (\oplus_{k,l} F_{k,l})$  avec  $F_{1,1} = I_{p,q}$ ,  $F_{2,1} = J_{2g}$  et  $F_{k,l} = p_{k,l} P_{2;k,l} \oplus q_{k,l} (-P_{2;k,l})$  pour  $(k,l) \in \mathcal{E}^H$ . On a alors

$$V_F = P \cdot \left( \bigoplus_{(k,l) \in \mathcal{E}} V_{F_{k,l}} \right) \quad (46)$$

où les blocs diagonaux  $V_{F_{k,l}}$  sont de la forme (35), (38) ou (43).

#### 4.4 Automorphismes et inclusion

Soit  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  représentant un type algébrique. Nous appellerons *groupe d'automorphismes de  $V_F$* , noté  $\Gamma_F$ , le sous-groupe de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  formé des éléments qui fixent  $V_F$  point par point. Il s'agit d'un groupe fini et on a toujours  $FF^\vee \in \Gamma_F$ . De plus, la classe de conjugaison de  $\Gamma_F$  dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  est un invariant du type géométrique représenté par  $V_F$ .

Pour la détermination de  $\Gamma_F$ , il sera souvent utile de remarquer qu'un élément  $T \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  (et plus généralement  $T \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$ ) fixe  $V_F$  point par point si et seulement si  $T$  fixe un point  $A \in V_F$  ainsi que tous les vecteurs de l'espace tangent  $T_A V_F$ .

**Proposition 4.18** (critère d'inclusion). *Soit  $F \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  représentant un type algébrique, soit  $A \in V_F$  et soit  $G \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ . Alors  $[G]$  est un type algébrique tel que  $V_F \subset V_G$  (resp. tel que  $A \in V_G$ ) si et seulement si  $FG^\vee \in \Gamma_F$  (resp. si et seulement si  $FG^\vee \cdot A = A$ ).*

*Preuve.* Pour  $A \in V_F$ , on a  $F^\vee(AG^\vee AG^{-1})F' = A^{-1}FG^\vee A(FG^\vee)'$ . Par suite  $AG^\vee A = G$  si et seulement si  $(FG^\vee) \cdot A = A$ , d'où le résultat (noter que  $G$  représente un type algébrique si et seulement si  $V_G \neq \emptyset$ ).

Le critère d'inclusion permet d'ordonner les types géométriques. Un type  $[F]$  étant donné, l'ensemble des  $G \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  avec  $GG^\vee$  d'ordre fini et  $V_F \subset V_G$  coïncide avec

$$\{F'T^\vee; T \in \Gamma_F\}.$$

**Proposition 4.19** (maximalité des types orthogonaux et symplectique). *Soient  $[F]$  et  $[G]$  des types algébriques.*

- (1) *Si  $\Gamma_F = \{\pm I_n\}$ , alors  $[F]$  est un type orthogonal ou symplectique (c.-à-d.  $FF^\vee = \pm I_n$ ) et  $V_F$  est maximal. De plus,  $V_F$  est équivalent à  $V_G$  si et seulement si  $[G] = [\pm F]$ .*
- (2) *Si  $[F]$  est le type symplectique ou un type orthogonal de signature distincte de  $(n, 0)$ ,  $(0, n)$  ( $n \geq 2$ ) et  $(1, 1)$ , alors  $\Gamma_F = \{\pm I_n\}$  et  $V_F$  est maximal.*

*Preuve.* L'assertion (1) est immédiate car  $FF^\vee \in \Gamma_F$  et d'après ce qui précède les seuls types  $[H]$  tels que  $V_F \subset V_H$  sont donnés par  $H = \pm F$ .

Pour la preuve de (2), on utilise les types réels. Il existe  $P \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  tel que  $P \cdot F = F_0$  avec  $F_0 = J_{2g}$  ou  $I_{p,q}$  (bien sûr, si le type est symplectique ou symétrique indéfini impair, on peut prendre  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$ ). Il suffit de prouver (dans les conditions de l'énoncé) que tout  $T \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  qui fixe point par point  $V_{F_0} = \mathfrak{S}_g$  ou  $V_{p,q}$  vaut  $\pm I_n$ . Un tel élément  $T$  doit vérifier  $T \cdot I_n = TT' = I_n$

(c.-à-d.  $T \in \mathbf{O}(n)$  et  $TXT' = X$  pour tout  $X \in T_{I_n}V_{F_0}$ . Mais, d'après la remarque 4.8, cet espace tangent est donné par

$$T_{I_n}V_{F_0} = \{X - F_0XF'_0; X \in \text{Sym}_n(\mathbf{R})\}.$$

En prenant  $X = uu'$  ( $u \in \mathbf{R}^n$ ), on a que  $Tuu' - TF_0uu'F'_0 = uu'T - F_0uu'F'_0T$ . Posons  $\langle u, v \rangle = u'v$  ( $u, v \in \mathbf{R}^n$ ). Pour tout  $u \in \mathbf{R}^n$  tel que  $F_0[u] = 0$  la relation précédente entraîne

$$\langle u, u \rangle Tu = \langle u, Tu \rangle u - \langle F_0u, Tu \rangle F_0u.$$

En multipliant par  $(F_0u)'$ , on trouve  $2\langle u, u \rangle \langle Tu, F_0u \rangle = 0$  d'où (si  $u \neq 0$ )  $\langle Tu, F_0u \rangle = 0$ . Finalement,  $T$  doit laisser stable toute droite isotrope de  $F_0$ . Dans le cas symplectique, cette condition entraîne évidemment que  $T$  est une homothétie. On vérifie facilement qu'il en est de même dans le cas symétrique indéfini, à l'exception de la signature  $(1, 1)$  qui ne comprend que deux droites isotropes (ce type n'est d'ailleurs pas maximal, voir table 8).

**Proposition 4.20.** *Soient  $[F]$  et  $[G]$  des types algébriques. On suppose que  $FF^\vee \neq \pm I_n$  et que le cardinal du groupe  $\Gamma_F$  vaut 4. Alors le type géométrique  $V_F$  est maximal. De plus,  $V_F$  est équivalent à  $V_G$  si et seulement si  $[G] = [\pm F]$  ou  $[G] = [\pm F']$ .*

*Preuve.* On a  $\Gamma_F = \{\pm I_n, \pm FF^\vee\}$ . Les seuls types  $[H]$  tels que  $V_F \subset V_H$  vérifient donc  $H = \pm F$  ou  $H = \pm F'$ .

## 4.5 Classification : méthode et notations

Nous déterminerons les types géométriques à partir des composantes réelles des types algébriques (tables 2-7), comme indiqué aux §§ 4.2 et 4.3. Le scindement sur  $\mathbf{R}$  d'un type algébrique  $[F]$  permet d'explicitier  $V_F$  comme produit d'espaces symétriques plongé dans l'espace des matrices de Gram (voir en particulier la relation (46)).

Pour alléger les notations, nous poserons souvent  $(F) = V_F$ . La relation évidente  $(-F) = (F)$  en entraîne d'autres. Par exemple, pour un type scindé  $F = F_1 \oplus F_2$  dans les conditions de la proposition 3.4 ( $\chi_{F_1F_1^\vee}$  et  $\chi_{F_2F_2^\vee}$  premiers entre eux), on a

$$(\pm F_1 \oplus \pm F_2) = (F_1 \oplus F_2).$$

Plus généralement, si  $F$  et  $G$  se scindent sur  $\mathbf{R}$  à l'aide d'un même élément  $P \in \mathbf{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  en composantes  $F_i$  et  $G_i$  telles que  $F_i = \pm G_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), avec  $(\chi_{F_iF_i^\vee})_{i=1, \dots, k}$  mutuellement premiers entre eux, alors  $(F) = (G)$ . Ainsi, les nombreuses coïncidences entre les types géométriques réduisent significativement la liste de ces types.

Pour chaque dimension  $n$  examinée, nous commencerons par établir la liste des types géométriques (seulement les types principaux si  $n \geq 5$ ), lesquels seront ensuite ordonnés (à équivalence près) grâce au critère d'inclusion (proposition 4.18). Nous obtiendrons ainsi les types maximaux jusqu'en rang 7. La détermination de toutes les relations d'inclusion nécessite la connaissance des groupes d'automorphismes  $\Gamma_F$ . Certains de ces groupes seront précisés dans les tables 8-11 et 13. En particulier nous noterons  $\mathbf{G}(n)$  le groupe d'automorphismes

du réseau  $\mathbf{Z}^n$ . Il s'agit du produit semi-direct défini par l'action naturelle du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  sur  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ ; le cardinal de  $\mathbf{G}(n)$  vaut donc  $2^n n!$ . Le groupe cyclique (resp. diédral) d'ordre  $k$  sera noté  $\mathbf{C}_k = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$  (resp.  $\mathbf{D}_k$ ,  $k$  pair).

Un des buts de cet article est l'étude de la densité des réseaux isoduaux. Rappelons que  $V_F$  satisfait un critère de compacité de Mahler (proposition 4.6). L'invariant d'Hermite  $\mu$  admet donc une valeur maximale sur  $V_F$  :

$$\mu_F = \max_{A \in V_F} \mu(A).$$

Pour chaque type géométrique, nous chercherons à estimer (et si possible à déterminer) cette « constante d'Hermite relative ». Nous dirons qu'elle est atteinte *de façon unique à équivalence près* dans  $V_F$  si deux points de  $V_F$  réalisant  $\mu_F$  sont équivalents par un élément  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  qui laisse stable  $V_F$  (par exemple  $P \in \mathbf{O}_F^t(\mathbf{Z})$ ). Pour les types symétriques indéfinis  $F = I_{p,q}$  et  $F = U_{2p}$  ( $pq > 0$ ), les  $\mu_F$  seront notées simplement  $\mu_{p,q}$  et  $\mu_{p,p}^{\Pi}$ . La constante  $\mu_{n,1}$  du type orthogonal lorentzien impair est déterminée jusqu'en rang 12 dans [Bav07] (voir en particulier la table 1, p. 40). Pour de nombreux types géométriques scindés (définition ci-dessous), le calcul de  $\mu_F$  se ramène aux dimensions inférieures.

**Définition 4.21.** Soit  $[F]$  un type algébrique (entier). Le type géométrique  $V_F$  est *scindé* (ou *décomposé* s'il existe deux types algébriques entiers  $[F_1]$  et  $[F_2]$  tels que  $V_F = V_{F_1} \oplus V_{F_2}$ ).

*Remarque 4.22.* Soit  $[F]$  un type algébrique entier de rang  $n$  et soit  $k$  la partie entière de  $n/2$ . Si  $V_F$  est scindé alors  $\mu_F \leq \gamma_k^{\text{isod}}$ .

Les tables 8-11 et 13 résument la classification des types géométriques. Nous y indiquons notamment

- la structure métrique (ou « type symétrique », noté t. s.) de  $V_F$ ,
- la structure du groupe  $\Gamma_F$  ou à défaut son cardinal,
- une estimation de la constante  $\mu_F$ ,
- les types géométriques contenant  $V_F$  à équivalence près.

Les constantes  $\mu_F$  sont toutes déterminées jusqu'en rang 4 (tables 8 et 9). En dimension supérieure, à défaut de la valeur exacte de  $\mu_F$ , nous donnons toujours une minoration par un maximum local de densité sur  $V_F$  (tables 10, 11 et 13). Cette dernière propriété variationnelle provient du fait que le réseau correspondant est dans chaque cas parfait et eutactique relativement à  $V_F$  (voir par exemple [Bav97, proposition 2.1-(1)]), ce qui se vérifie en déterminant les gradients des fonctions longueurs, soit à partir d'un paramétrage explicite du type  $V_F$ , soit à partir de l'expression « implicite » de la proposition 4.7.

Concernant la structure métrique, nous noterons  $\mathbf{H}_a^n$  l'espace de dimension  $n$  complet et simplement connexe à courbure sectionnelle constante  $-1/a$ ; on trouvera par exemple trois sortes de « plans hyperboliques » :

$$\mathbf{H}_2^2, \mathbf{H}_8^2 \text{ ou } \mathbf{H}_4^2,$$

à courbure  $-1/2$ ,  $-1/8$  ou  $-1/4$  suivant qu'ils proviennent d'un type réel symplectique, symétrique ou hermitien (voir rem. 4.17).

Les détails techniques (matrices de décomposition réelle des types, détermination des inclusions, calculs des gradients et vérification des maxima locaux, etc) des différentes étapes ne seront pas explicités. Cependant nous détaillerons

certains cas particuliers intéressants : paramétrage remarquable d'un type, détermination non immédiate d'une constante  $\mu_F$ , types géométriques maximaux non scindés dans l'annexe A3 (pour les dimensions 5, 6 et 7, autres que les symétriques ou symplectiques).

#### 4.6 Types géométriques de rang $n \leq 3$

Pour  $n = 2$ , on trouve 5 types géométriques  $V_{I_2} = \{I_2\}$ ,  $V_{1,1}$  (voir équation (38)),  $V_{1,1}^{II} = V_{U_2}$ ,  $V_{F_2} = \{A_2\}$  avec

$$V_{1,1}^{II} = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix}; u \in \mathbf{R} \right\} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ainsi qu'un unique type maximal : le type symplectique  $\mathfrak{S}_2 = P_2$ .

Pour  $n = 3$ , on constate d'abord les relations  $(F_3) = (I_3) = \{I_3\}$ ,  $(I_1 \oplus F_2) = (-I_1 \oplus F_2) = \{I_1 \oplus A_2\}$  et  $(G_3) = (H_3) = \{\Lambda_3\}$  avec

$$\Lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Outre ces trois types de dimension 0, on trouve deux types maximaux :

$$V_{2,1} = \left\{ \frac{1}{1-|z|^2} \begin{pmatrix} 1 + \Re(z^2) & \Im(z^2) & 2\Re z \\ \Im(z^2) & 1 - \Re(z^2) & 2\Im z \\ 2\Re z & 2\Im z & 1 + |z|^2 \end{pmatrix}; |z|^2 < 1 \right\} \quad \text{et}$$

$$V_{I_1 \oplus J_2} = P_1 \oplus P_2 = \left\{ \frac{1}{\Im z} \begin{pmatrix} \Im z & 0 & 0 \\ 0 & |z|^2 & \Re z \\ 0 & \Re z & 1 \end{pmatrix}; \Im z > 0 \right\}$$

(comparer avec [CS94, théorème 1]). Métriquement, ces deux types sont des « plans hyperboliques » de courbure  $-1/8$  et  $-1/2$  respectivement (voir rem. 4.17). On sait ([CS94, théorème 2]) que la constante d'Hermite « isoduale » en dimension 3 vaut

$$\gamma_3^{\text{isod}} = \mu(\Lambda_3) = \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \simeq 1,2071, \quad (48)$$

$n$	$d$	$FF^\vee$	$n^\circ$	$F$	$(F)$	dim.	t. s.	$\Gamma_F$	$\mu_F$	$\subseteq_{\text{eq}}$
1	1	$I_1$	1	$I_1$	$\{I_1\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2$	1	max.
2	1	$I_2$	1	$I_2$	$\{I_2\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{D}_8$	1	1-4
			2	$I_{1,1}$	$V_{1,1}$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2^2$	$2/\sqrt{3}$	2,4
			3	$U_2$	$V_{1,1}^{II}$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2^2$	1	3,4
	2	$-I_2$	4	$J_2$	$P_2$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2$	$2/\sqrt{3}$	max.
	6	$W_2$	5	$F_2$	$\{A_2\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{D}_{12}$	$2/\sqrt{3}$	2,4,5
3	1	$I_3$	1	$I_3$	$\{I_3\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{G}(3)$	1	1-3
			2	$I_{2,1}$	$V_{2,1}$	2	$\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2$	$\alpha$	max.
	2	$I_{1,2}$	3	$I_1 J_2$	$P_1 P_2$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	1	max.
	4	$X_3$	4	$G_3$	$\{\Lambda_3\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_8$	$\alpha$	2,4
	6	$I_1 W_2$	5	$I_1 F_2$	$\{I_1 A_2\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_{12}$	1	2,3,5

TABLE 8 – Types géométriques isoduaux de rang  $n \leq 3$

atteinte par un unique réseau (à isométrie près) dont une matrice de Gram est  $\Lambda_3$  (équivalente à un point de  $V_{2,1}$  mais qui n'appartient pas à  $V_{2,1}$ ). Rappelons ([Vin72]) que l'action induite par  $\mathbf{O}_{2,1}(\mathbf{Z})$  sur l'ensemble des droites négatives de  $\mathbf{R}^{2,1}$  (c.-à-d. sur  $V_{2,1}$ ) est celle d'un groupe de réflexions du plan hyperbolique, de type triangulaire  $(2, 4, \infty)$ . On retrouve facilement la densité maximale dans  $V_{2,1}$  par un simple découpage du triangle fondamental ([Bav07, p. 45]).

La situation en rang  $n \leq 3$  est résumée dans la table 8, où l'entier  $d$  désigne l'ordre de  $FF^\vee$ .

## 4.7 Types géométriques de rang 4

En dimension 4, nous trouvons 23 types géométriques dont 4 types maximaux : les types symétriques (excepté  $I_4$ ) et le type symplectique. Les constantes  $\mu_F$  sont toutes explicitées (voir table 9). Deux réseaux remarquables réalisent le maximum de  $\mu$  sur les types maximaux. Il s'agit de

$$D_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Il est bien connu que  $\mu(D_4) = \sqrt{2} = \gamma_4^{\text{isod}} = \gamma_4$  (constante d'Hermite en dimension 4), maximum de  $\mu$  dans  $\mathfrak{S}_2$  et  $V_{2,2}$ , et on a  $\mu(\Lambda_4) = 4/3$ , maximum de  $\mu$  dans  $V_{3,1}$  ([Bav07]) et dans  $V_{2,2}^{\text{II}}$  (voir plus bas). Le groupe d'automorphismes de  $\Lambda_4$  est résoluble non nilpotent d'ordre 144 et d'abélianisé  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ .

D'après la table 3, il y a 28 classes de types algébriques au signe près. Les relations suivantes réduisent à 23 le nombre de types géométriques ( $\simeq$  désigne l'équivalence entière) :

$$\begin{aligned} (I_1 \oplus F_3) &= (I_4) = \{I_4\}, \\ (I_1 \oplus H_3) &= (I_1 \oplus G_3) = \{I_1 \oplus \Lambda_3\}, \\ (-I_2 \oplus F_2) &= (I_2 \oplus F_2) = \{I_2 \oplus A_2\}, \\ (N_4) &\simeq (M_4), \quad (O_4) \simeq (L_4) = \{D_4\}. \end{aligned}$$

Ces 23 types se distinguent par leur dimension, leur structure métrique, la valeur de  $\mu_F$  et le cardinal du groupe  $\Gamma_F$  (voir table 9).

Notons  $V_{2,2}^{\text{II}} = (U_4)$  le type symétrique pair ( $U_4 = U_2 \otimes I_2$ ). Les types  $V_{2,2}$  et  $V_{2,2}^{\text{II}}$  sont évidemment paramétrés par  $\mathcal{V}_{2,2}$  (équation (37)) via (38), mais aussi par  $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1$ . Un paramétrage particulièrement agréable pour  $V_{2,2}^{\text{II}}$  s'obtient comme suit. Considérons  $M_2(\mathbf{Z})$  muni de la base  $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, -E_{2,1})$  (les  $E_{i,j}$  étant les matrices élémentaires) et de la forme quadratique  $f$  définie par

$$f(A) = 2 \det(A) \quad A \in M_2(\mathbf{Z}),$$

forme dont la matrice vaut dans la base  $\mathcal{B}$  vaut  $U_4$ . La multiplication (à droite ou à gauche) par un élément de  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  est une isométrie réelle de  $f$ . Ainsi l'application  $\phi$  définie par

$$\phi(A, B)(X) = AXB^{-1} \quad ((A, B) \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}), X \in M_2(\mathbf{Z})) \quad (49)$$

induit un isomorphisme entre les groupes  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) / \{\pm(I_2, I_2)\}$  et  $\mathbf{SO}_0(f, \mathbf{R})$ . En explicitant les matrices dans  $\mathcal{B}$  de multiplication par les éléments de  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ , on trouve facilement un paramétrage équivariant du type



symétrique pair :

$$V_{2,2}^{\text{II}} = \left\{ \frac{1}{\Im z \Im w} \begin{pmatrix} |z|^2 & -|z|^2 \Re w & -\Re z \Re w & -\Re z \\ -|z|^2 \Re w & |zw|^2 & \Re z |w|^2 & \Re z \Re w \\ -\Re z \Re w & \Re z |w|^2 & |w|^2 & \Re w \\ -\Re z & \Re z \Re w & \Re w & 1 \end{pmatrix} ; (z, w) \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1 \right\}. \quad (50)$$

La métrique induite par ce plongement s'écrit  $ds^2 = 4(|dz|^2/\Im z + |dw|^2/\Im w)$  et les types  $V_{2,2}^{\text{II}}$  et  $V_{2,2}$  sont donc isométriques au produit  $\mathbf{H}_4^2 \times \mathbf{H}_4^2$  de deux plans à courbure constante  $-1/4$ .

*Remarque 4.23.* Noter également la description  $V_{2,2}^{\text{II}} = (-J_2 \oplus I_2) \cdot (\mathfrak{S}_2 \otimes \mathfrak{S}_2)$  qui redonne immédiatement les propriétés métriques (proposition 4.2-b).

$d$	$FF^\vee$	$n^\circ$	$F$	$(F)$	dim.	t. s.	$\Gamma_F$	$\mu_F$	$\mathbb{C}_{\text{eq}}$
1	$I_4$	1	$I_4$	$\{I_4\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{G}(4)$	1	1-10,13
		2	$I_{3,1}$	$V_{3,1}$	3	$\mathbf{H}_8^3$	$\mathbf{C}_2$	4/3	max.
		3	$I_{2,2}$	$V_{2,2}$	4	$\mathbf{H}_4^2 \mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2$	$\sqrt{2}$	max.
		4	$U_4$	$V_{2,2}^{\text{II}}$	4	$\mathbf{H}_4^2 \mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2$	4/3	max.
2	$I_4^-$	5	$J_4$	$\mathfrak{S}_2$	6	$\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{C}_2$	$\sqrt{2}$	max.
		6	$I_2 J_2$	$\{I_2\} P_2$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{D}_8 \mathbf{C}_2$	1	5-8
	$I_{2,2}$	7	$I_{1,1} J_2$	$V_{1,1} P_2$	3	$\mathbf{R} \mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^3$	$2/\sqrt{3}$	5,7
		8	$U_2 J_2$	$V_{1,1}^{\text{II}} P_2$	3	$\mathbf{R} \mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^3$	1	5,8
	$R_2 R_2$	9	$F_4$	$(F_4)$	3	$\mathbf{R} \mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^3$	$\sqrt{2}$	5,9
3	$I_1 R_3$	10	$I_1^- F_3$	$(I_1^- F_3)$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{D}_{12}$	4/3	2,3,10
		11	$G_4$	$\{\Lambda_4\}$	0	$\mathbf{R}^0$	144	4/3	2-5,9-12,22
	$V_2 V_2$	12	$H_4$	$(H_4)$	2	$\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{D}_{12}$	4/3	4,5,12
4	$J_2 J_2$	13	$K_4$	$(K_4)$	2	$\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{D}_8$	$\sqrt{2}$	5,13
		14	$L_4$	$\{D_4\}$	0	$\mathbf{R}^0$	1152	$\sqrt{2}$	3,5,9,13,14,16,22
	$I_1 X_3$	15	$I_1 G_3$	$\{I_1 \Lambda_3\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2^2 \mathbf{D}_8$	1	2,3,15,16
		16	$I_1^- G_3$	$(I_1^- G_3)$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_8$	$\sqrt{2}$	3,16
6	$I_2 W_2$	17	$I_2 F_2$	$\{I_2 A_2\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{D}_8 \mathbf{D}_{12}$	1	2,3,5-8,17-20
		18	$I_{1,1} F_2$	$V_{1,1} \{A_2\}$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2^2 \mathbf{D}_{12}$	$2/\sqrt{3}$	3,5,7,18,20
		19	$U_2 F_2$	$V_{1,1}^{\text{II}} \{A_2\}$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2^2 \mathbf{D}_{12}$	1	3,5,7,8,19,20
	$I_2^- W_2$	20	$J_2 F_2$	$P_2 \{A_2\}$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_{12}$	$2/\sqrt{3}$	5,7,20
	$W_2 W_2$	21	$F_2 F_2$	$\{A_2 A_2\}$	0	$\mathbf{R}^0$	288	$2/\sqrt{3}$	3-5,7,9,12,18,20-22
		22	$F_2^- F_2$	$(F_2^- F_2)$	2	$\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{D}_{12}$	$\sqrt{2}$	5,22
10	$W_4$	23	$M_4$	$\{\Lambda_4'\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{D}_{20}$	$\beta$	3,5,23

TABLE 9 – Types géométriques isoduaux de rang 4 (23 types, 4 max.)

Nous déterminons les constantes d'Hermite relatives en commençant par les types maximaux. Pour les types  $\mathfrak{S}_2$  et  $V_{2,2}$ , la constante  $\mu_F$  vaut  $\sqrt{2}$  car ces types contiennent  $D_4$  à équivalence près : en posant  $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  on a

$$D4 \simeq \sigma_2 \left( X/2 + iI_2/\sqrt{2} \right) \in \mathfrak{S}_2 \quad \text{et} \quad D4 = \varphi_{2,2} \left( (1 - 1/\sqrt{2})X \right) \in V_{2,2}$$

(on rappelle que les plongements  $\sigma_g$  et  $\varphi_{p,q}$  sont définis par (35) et (38) respectivement). Le cas du type lorentzien  $V_{3,1}$  est traité dans [Bav07, §1.3] : on a  $\mu_{3,1} = 4/3$  et  $V_{3,1}$  contient un point équivalent à  $\Lambda_4$ . Il reste à examiner le type symétrique pair  $V_{2,2}^{\text{II}}$ .

**Proposition 4.24.** *Le maximum de l'invariant d'Hermite  $\mu$  sur  $V_{2,2}^{\text{II}}$  vaut  $\mu_{2,2}^{\text{II}} = 4/3$ , réalisé par une unique forme à équivalence près dans  $V_{2,2}^{\text{II}}$ .*

*Preuve.* Nous utiliserons le modèle ci-dessus. La formule (49) montre que l'action diagonale de  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$  sur  $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1$  correspond à une action par équivalence entière sur le type  $V_{2,2}^{\text{II}}$ . Il est clair que le carré de

$$\Delta = \{z \in \mathfrak{H}_1; |\Re z| \leq 1/2, |z| \geq 1\} \quad (51)$$

est un domaine fondamental pour  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ . Si  $(z, w) \in \Delta \times \Delta$ , on a  $(\Im z \Im w)^{-1} \leq 4/3$  avec égalité pour  $\Im z = \Im w = \sqrt{3}/2$ ; comme ces derniers points correspondent à des matrices équivalentes à  $\Lambda_4$  (donc de minimum  $4/3$ ), on a finalement  $\mu_{2,2}^{\text{II}} = 4/3$ , voir (50).

Pour la détermination des autres constantes  $\mu_F$ , nous pouvons écarter de la discussion les types décomposés (diagonaux par blocs), dont les constantes  $\mu_F$  sont données par celles des types de rang plus petit :  $(I_4)$ ,  $(I_2 J_2)$ ,  $(I_{1,1} J_2)$ ,  $(U_2 J_2)$ ,  $(I_1 G_3)$ ,  $(I_2 F_2)$ ,  $(I_{1,1} F_2)$ ,  $(U_2 F_2)$ ,  $(J_2 F_2)$  et  $(F_2 F_2)$ .

Ensuite, il y a les types inclus (à équivalence près) à  $\mathfrak{S}_2$  ou à  $V_{2,2}$  et qui contiennent un point équivalent à  $D_4$ , pour lesquels  $\mu_F = \sqrt{2}$ . Ces types correspondent aux chaînes

$$(L_4) \subset_{\text{eq}} (F) \subset_{\text{eq}} \mathfrak{S}_2 \quad \text{ou} \quad (L_4) \subset_{\text{eq}} (F) \subset_{\text{eq}} V_{2,2}$$

que l'on trouve dans la dernière colonne de la table 9. Il s'agit de  $(F_4)$ ,  $(K_4)$ ,  $(L_4) = \{D_4\}$ ,  $(I_1^- G_3)$  et  $(F_2^- F_2)$ . Les inclusions peuvent être explicitées dans chaque cas. Par exemple  $(F_4)$  est inclus dans  $\mathfrak{S}_2$  car

$$(F_4) = \{\sigma_2(U_2(iu - z)/2 + I_2(iu + z)/2); z \in \mathfrak{H}_1, u > 0\},$$

et la forme obtenue pour  $z = 1 + i/\sqrt{2}$ ,  $u = 1/\sqrt{2}$  est équivalente à  $D_4$ .

De même, pour les types  $(F)$  vérifiant  $(G_4) \subset_{\text{eq}} (F) \subset_{\text{eq}} V_{3,1}$  ou  $(G_4) \subset_{\text{eq}} (F) \subset_{\text{eq}} V_{2,2}^{\text{II}}$ , on a  $\mu_F = 4/3$ . Il s'agit des types  $(I_1^- F_3)$ ,  $(G_4) = \{\Lambda_4\}$  et  $(H_4)$  (voir table 9).

Il reste un seul type à examiner,  $(M_4) = \{\Lambda'_4\}$  avec

$$\Lambda'_4 = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} & 1 & \sqrt{5}-3 \\ 1-\sqrt{5} & 2\sqrt{5}-2 & 3-2\sqrt{5} & 1 \\ 1 & 3-2\sqrt{5} & 2\sqrt{5}-2 & 1-\sqrt{5} \\ \sqrt{5}-3 & 1 & 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix},$$

forme de minimum  $\beta = \frac{2}{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \simeq 1,2310$ .

## 4.8 Types géométriques principaux de rang 5

En rang 5, nous trouvons 14 types géométriques principaux dont 5 maximaux :  $I_{4,1}$ ,  $I_{3,2}$ ,  $I_{2,1} \oplus J_2$ ,  $I_1 \oplus J_4$  et  $I_1 \oplus F_4$ ; nous déterminons les constantes  $\mu_F$  à l'exception de  $\mu_{3,2}$  (voir table 10). Il existe 22 types algébriques principaux de rang 5 au signe près (table 4), parmi lesquels on constate 8 relations :

$$\begin{aligned} (I_1 \oplus -L_4) &= (I_1 \oplus L_4) = \{I_1 \oplus D_4\}, \\ (I_2 \oplus H_3) &= (I_2 \oplus G_3) = \{I_2 \oplus \Lambda_3\}, \quad (-I_2 \oplus H_3) = (-I_2 \oplus G_3), \\ (U_2 \oplus H_3) &= (U_2 \oplus G_3), \quad (J_2 \oplus H_3) = (J_2 \oplus G_3), \\ (G_5) &= (F_5) = \{\Lambda'_5\}, \quad (H_5) \simeq (G_5), \quad (K_5) = (H_5), \end{aligned}$$

où la forme  $\Lambda'_5$  est explicitée ci-dessous. Finalement, il y a 14 types géométriques principaux qui se différencient par leur dimension, leur structure métrique, la valeur de  $\mu_F$  et le cardinal de  $\Gamma_F$ , à l'exception des types  $(-I_2 \oplus G_3)$  et  $(U_2 \oplus G_3)$  distinguables à l'aide du critère d'inclusion (voir table 10). On compte 8 types géométriques décomposés (pour lesquels on détermine facilement  $\mu_F$ ) et 6 seulement non décomposés :  $V_{4,1}$ ,  $V_{3,2}$ ,  $(I_1 \oplus F_4)$ ,  $(-I_2 \oplus G_3)$ ,  $(U_2 \oplus G_3)$  et  $(F_5)$ . Ce dernier type est réduit à un point  $(F_5) = \{\Lambda'_5\}$ , défini par

$$\Lambda'_5 = \frac{1}{2\gamma} \begin{pmatrix} 2+\gamma-\gamma^2 & -1 & \gamma^2-1 & \gamma^2-1 & -1 \\ -1 & 2 & -\gamma^2 & 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2-1 & -\gamma^2 & 2 & -\gamma^2 & 0 \\ \gamma^2-1 & 0 & -\gamma^2 & 2 & -\gamma^2 \\ -1 & \gamma^2 & 0 & -\gamma^2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{où } \gamma = (2 - \sqrt{2})^{1/2}. \quad (52)$$

Le minimum de  $\Lambda'_5$  vaut  $1/\gamma = (1 + 1/\sqrt{2})^{1/2} \simeq 1,3065$ .

Passons à l'étude des constantes  $\mu_F$ , déjà déterminées pour les types décomposés (voir table 10) et pour  $(F_5)$ . Il reste à examiner les types  $V_{4,1}$ ,  $V_{3,2}$ ,  $(I_1 \oplus F_4)$ ,  $(-I_2 \oplus G_3)$  et  $(U_2 \oplus G_3)$ . D'après [Bav07, théorème 1], on a  $\mu_{4,1} = 7/5$  réalisée de façon unique à équivalence près dans  $V_{4,1}$  par la forme  $\Lambda_5$  ci-dessous. Nous introduisons également deux formes  $\Lambda_5^b$  et  $\Lambda_5^c$  équivalentes à  $\Lambda_5$  et appartenant respectivement à  $V_{3,2}$  et  $(I_1 \oplus F_4)$  :

$$\Lambda_5 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 13 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_5^b = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_5^c = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 7 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 7 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

**Proposition 4.25.** *Le maximum de  $\mu$  sur le type géométrique  $(I_1 \oplus F_4)$  vaut  $7/5$ , atteint de façon unique par  $\Lambda_5^c$  à équivalence près dans  $(I_1 \oplus F_4)$ .*

*Preuve.* Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  posons

$$\theta_1(A, B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2ad + 2bc & -2ac & -2ac & 2bd & 2bd \\ -2ab & a^2 + \alpha & a^2 - \alpha & -b^2 - \beta & -b^2 + \beta \\ -2ab & a^2 - \alpha & a^2 + \alpha & -b^2 + \beta & -b^2 - \beta \\ 2cd & -c^2 - \gamma & -c^2 + \gamma & d^2 + \delta & d^2 - \delta \\ 2cd & -c^2 + \gamma & -c^2 - \gamma & d^2 - \delta & d^2 + \delta \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Cette application induit un isomorphisme entre les groupes  $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  et la composante neutre de  $\mathbf{O}_{I_1 F_4}^t(\mathbf{R})$ . Elle permet également d'écrire un paramétrage équivariant du type  $(I_1 \oplus F_4)$  par le produit  $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1$  sous la forme  $A_{w,z} = P_{w,z} P'_{w,z}$  avec  $w = s + it \in \mathfrak{H}_1$ ,  $z = x + iy \in \mathfrak{H}_1$  et

$$P_{w,z} = \frac{1}{2t\sqrt{y}} \begin{pmatrix} 2t\sqrt{y} & 0 & 0 & 2s\sqrt{y} & 2s\sqrt{y} \\ -2st\sqrt{y} & t^2\sqrt{y} + ty & t^2\sqrt{y} - ty & -s^2\sqrt{y} - xt & -s^2\sqrt{y} + xt \\ -2st\sqrt{y} & t^2\sqrt{y} - ty & t^2\sqrt{y} + ty & -s^2\sqrt{y} + xt & -s^2\sqrt{y} - xt \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{y} + t & \sqrt{y} - t \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{y} - t & \sqrt{y} + t \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Noter que  $A_{i,i} = I_5$ . D'après (54), le groupe  $\{(A, B) \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})^2; A \equiv B \pmod{2}\}$  agit via  $\theta_1$  par équivalence entière sur  $(I_1 \oplus F_4)$ . Soit  $\Gamma(2)$  le noyau du morphisme

de réduction modulo 2 de  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$  dans  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ . Le quadrilatère hyperbolique de sommets  $-1, 0, 1, \infty$  est un domaine fondamental classique pour l'action de  $\Gamma(2)$  sur  $\mathfrak{H}_1$ . Et faisant agir  $(A, A)$  ( $A \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ ), puis  $\{I_2\} \times \Gamma(2)$  et enfin les matrices  $I_{4,1}$  et  $I_3 \oplus U_2$  sur le type (qui changent  $s$  en  $-s$  et  $x$  en  $-x$ , respectivement), on se ramène à

$$(w, z) \in \mathcal{D} = \{0 \leq \Re w \leq \frac{1}{2}, |w|^2 \geq 1\} \times \{0 \leq \Re z \leq 1, |z - \frac{1}{2}|^2 \geq \frac{1}{4}\}.$$

On rappelle la notation  $A[u] = u' Au$  ( $A \in P_n, u \in \mathbf{R}^n$ ). Notons  $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq 5}$  la base naturelle de  $\mathbf{Z}^5$  et posons

$$\begin{aligned} l_1 &= A_{w,z}[\epsilon_1] = \frac{2s^2+t^2}{t^2}, & l_2 &= A_{w,z}[\epsilon_2] = \frac{1}{2} \left( \frac{|w|^2}{\Im w} \right)^2 + \frac{|z|^2}{2\Im z}, \\ l_3 &= A_{w,z}[\epsilon_4] = \frac{1}{2(\Im w)^2} + \frac{1}{2\Im z}, & l_4 &= A_{w,z}[\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_5] = \frac{1}{2} \left( \frac{|w-1|^2}{\Im w} \right)^2 + \frac{|z-1|^2}{2\Im z}. \end{aligned} \quad (56)$$

Ces fonctions ont toutes une interprétation géométrique. Ainsi  $l_1 = \cosh(2d)$  où  $d$  est la distance à la géodésique  $\Re w = 0$  dans le plan hyperbolique des  $w$ . Les autres  $l_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) dépendent d'expressions de la forme  $|w-p|^2/\Im w$  ( $p \in \mathbf{Q}$ ),  $1/\Im w$  et de quantités analogues pour  $z$ . Rappelons que  $\log(|w-p|^2/\Im w)$  (resp.  $\log(1/\Im w)$ ) est une fonction de Busemann du plan hyperbolique  $\mathfrak{H}_1$ , mesurant la « distance » à la pointe  $p \in \mathbf{R}$  (resp. à la pointe  $\infty$ ); ses sous-niveaux sont les horoboules centrées en  $p$  (resp. en  $\infty$ ). Ainsi l'horoboule  $\mathcal{H}^p(w_0)$  centrée en  $p \in \partial\mathfrak{H}_1 = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  dont le bord contient  $w_0 \in \mathfrak{H}_1$  est donnée par

$$\mathcal{H}^p(w_0) = \left\{ \frac{|w-p|^2}{\Im w} \leq \frac{|w_0-p|^2}{\Im w_0} \right\} \quad (p \in \mathbf{R}) \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}^\infty(w_0) = \{\Im w \geq \Im w_0\}. \quad (57)$$

Nous allons donc majorer  $\mu_{I_1 F_4}$  en recouvrant le domaine  $\mathcal{D}$  par une famille *ad hoc* de produits d'ensembles géométriques (bandes et horoboules).

Soit  $(w_e, z_e) \in \mathcal{D}$  défini par  $w_e = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{5})$  et  $z_e = \frac{1}{2}(1 + i)$  (voir figure 1). On vérifie que  $\Lambda_5^\epsilon = A_{w_e, z_e}$  et que le minimum de cette forme vaut  $7/5$ , valeur commune des  $(l_k)$  en  $(w_e, z_e)$ . Si  $w$  appartient à la bande  $|s/t| \leq \sqrt{5}$ , alors  $l_1(w, z) \leq 7/5$  pour tout  $z \in \mathfrak{H}_1$ . On peut donc supposer que  $w \in T$  avec

$$T = \{w \in \mathfrak{H}_1; 0 \leq s \leq 1/2, |w| \geq 1 \text{ et } s \leq \sqrt{5}t\}.$$

Remarquer que  $T$  est inclus dans les horoboules  $\mathcal{H}^0(w_e)$  et  $\mathcal{H}^1(w_e)$  (voir (57)). Sur  $T \times \mathcal{H}^0(z_e) \subset \mathcal{H}^0(w_e) \times \mathcal{H}^0(z_e)$  (resp. sur  $T \times \mathcal{H}^1(z_e) \subset \mathcal{H}^1(w_e) \times \mathcal{H}^1(z_e)$ ), on a  $l_2 \leq 7/5$  (resp.  $l_4 \leq 7/5$ ). Pour  $w \in T$  et  $y \geq 15/22$ , on a  $l_3(w, z) \leq 7/5$  (car  $t \geq \sqrt{3}/2$ ). Il reste à examiner le cas de  $(w, z) \in T \times T'$ , où  $T'$  est le triangle bordé par les horosphères  $\partial\mathcal{H}^1(z_e)$ ,  $\partial\mathcal{H}^0(z_e)$  et  $y = 15/22$ . Pour conclure, on découpe  $T'$  en tranches horizontales. Soit  $y_0 \in [1/2, 15/22]$ , soit  $\sigma_0 = T' \cap \{y = y_0\}$  et soit  $t_0 > 0$  tel que  $t_0^{-2} = 14/5 - y_0^{-1}$ . On a évidemment  $l_3 \leq 7/5$  sur  $\sigma_0 \times (T \cap \{t \geq t_0\})$ . Ensuite, on majore  $l_2$  sur  $\sigma_0 \times (T \cap \{t \leq t_0\})$  en utilisant le produit d'horoboules  $\mathcal{H}^0(w_0) \times \mathcal{H}^0(z_0)$  ( $w_0 = 1/2 + it_0$ ,  $z_0$  extrémité droite de  $\sigma_0$ , voir figure 1). Un calcul élémentaire conduit à

$$l_2(w, z) \leq \frac{67}{80} + \frac{15}{32y_0} + \frac{5y_0}{28y_0 - 10} - \left( \frac{1}{y_0} - 1 \right)^{1/2} \quad (z, w) \in \sigma_0 \times (T \cap \{t \geq t_0\}).$$

Le second membre de cette inégalité étant une fonction strictement décroissante de  $y_0$  sur  $[1/2, 15/22]$ , on a que  $l_2 \leq 7/5$  sur  $\sigma_0 \times (T \cap \{t \leq t_0\})$ , d'où finalement

$\mu_{I_1 F_4} = 7/5$ . Concernant le cas d'égalité, on observera que toutes les inégalités  $l_k \leq 7/5$  données plus haut sont strictes l'intérieur des domaines considérés ; pour les points du bord où  $l_k = 7/5$ , on peut toujours obtenir l'inégalité stricte  $\mu < 7/5$  en changeant de fonction  $l_k$ , à l'exception du point  $(w_e, z_e)$ . Par exemple  $l_3 = 7/5$  sur  $\sigma_0 \times (T \cap \{t = t_0\})$  mais d'après ce qui précède  $l_2 < 7/5$  sur cet ensemble, sauf pour  $y_0 = 1/2$ . Ce qui achève la preuve.

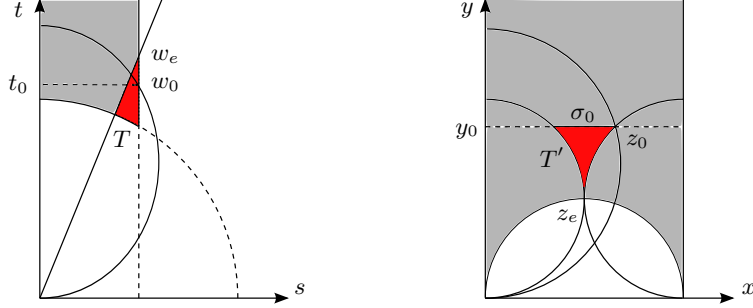


FIGURE 1 – Type géométrique  $(I_1 \oplus F_4)$

**Proposition 4.26.** *Le maximum de  $\mu$  sur le type géométrique  $(-I_2 \oplus G_3)$  vaut  $4/3$ , réalisé de façon unique à équivalence près dans  $(-I_2 \oplus G_3)$ .*

*Preuve.* Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ . On pose  $q(a, b, c, d) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ . Alors l'application  $\theta_2 : \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{SL}_5(\mathbf{R})$  définie par

$$\theta_2(M) = \begin{pmatrix} ad + bc & ac - bd & \sqrt{2}(bd + ac) & -\frac{\sqrt{2}}{2}(bd + ac) & \frac{\sqrt{2}}{2}(bd + ac) \\ ab - cd & \frac{1}{2}q(a, d, b, c) & \frac{\sqrt{2}}{2}q(a, b, c, d) & -\frac{\sqrt{2}}{4}q(a, b, c, d) & \frac{\sqrt{2}}{4}q(a, b, c, d) \\ \frac{1}{2}(ab + cd) & \frac{\sqrt{2}}{4}q(a, c, b, d) & \frac{\text{Tr}(MM')}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\text{Tr}(MM')}{4} & \frac{\text{Tr}(MM')}{4} - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induit un isomorphisme de  $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$  sur la composante neutre du groupe  $\mathbf{O}_F^t(\mathbf{R})$ ,  $F = -I_2 \oplus G_3$ . Posons

$$M_z = \frac{1}{\sqrt{\Im z}} \begin{pmatrix} \Im z & \Re z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathfrak{H}_1). \quad (58)$$

La formule  $A_z = \theta_2(M_z) \cdot (I_2 \oplus \Lambda_3)$  donne un paramétrage équivariant avec  $A_i = I_2 \oplus \Lambda_3$  (voir (47) pour la définition de  $\Lambda_3$ ). Pour  $\alpha = u + v/\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[1/\sqrt{2}]$ , on pose  $\alpha^c = u - v/\sqrt{2}$ . Soit  $\Gamma$  le sous-groupe de  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\epsilon\beta^c \\ \beta & \epsilon\alpha^c \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}[1/\sqrt{2}]) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha\alpha^c + \beta\beta^c = \epsilon = \pm 1, \\ \alpha - \alpha^c + \beta - \beta^c \in 2\sqrt{2}\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Une vérification facile montre que  $\theta_2(\Gamma)$  est inclus dans  $\mathbf{SL}_5(\mathbf{Z})$ . En particulier  $\Gamma$  est discret et ses orbites sur  $\mathfrak{H}_1$  ne s'accumulent pas – pour la topologie des pointes – sur les pointes du groupe (points fixes des paraboliques de  $\Gamma$ ). Autrement dit, si  $p \in \partial\mathfrak{H}_1$  est une pointe de  $\Gamma$ , alors toute orbite de  $\Gamma$  sur  $\mathfrak{H}_1$  contient un point  $z$  à « distance minimale » de  $p$ , c'est-à-dire tel que

$$|z - p|^2 \leq \frac{\Im z}{\Im \gamma(z)} |\gamma(z) - p|^2 = |cz + d|^2 |\gamma(z) - p|^2 \quad (59)$$

pour tout  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  (voir (57)). De plus, si  $t \in \Gamma$  est un parabolique fixant  $p$ , tous les  $t^k(z)$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) vérifient encore la condition (59). Considérons les transformations suivantes :

$$t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ -2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 5 + 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -5 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

L'élément  $t \in \Gamma$  est parabolique de point fixe  $p = 1 + \sqrt{2}$  et la condition (59) pour  $p$  et  $\gamma$  se réduit à  $|z|^2 \geq 1$ . D'après ce qui précède, toute orbite de  $\Gamma$  coupe le domaine  $\mathcal{E}$  défini par les inégalités (voir figure 2)

$$|z|^2 \geq 1, \quad |z - 1|^2 \leq 2 \quad \text{et} \quad |7z - 3(1 + 2\sqrt{2})|^2 \geq (4 + \sqrt{2})^2.$$

Les fonctions  $l_1(z) = A_z[\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_5]$  et  $l_2(z) = A_z[\epsilon_2]$  ( $z \in \mathfrak{H}_1$ ) s'explicitent en

$$l_1(z) = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2} \left( \frac{|z - (1 + \sqrt{2})|^2}{\Im z} \right)^2 \quad \text{et} \quad l_2(z) = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{|z|^2 - 1}{\Im z} \right)^2.$$

D'après (57), les sous-niveaux de  $l_1$  sont les horoboules centrées en  $p = 1 + \sqrt{2}$ . De plus, si  $d$  désigne la distance à la géodésique  $|z|^2 - 1 = 0$ , alors  $l_2 = \cosh(2d)$ . Par suite on a  $\min(l_1, l_2) \leq 4/3$  sur  $\mathcal{E}$  avec égalité seulement pour les points  $z_0 = \frac{1}{7}[1 + 2\sqrt{2} + i\sqrt{3}(4 + \sqrt{2})]$  et  $z_1 = t(z_0)$  (voir figure 2). On vérifie enfin que le minimum de la forme  $A_{z_0}$  vaut  $4/3$ , d'où le résultat.

**Proposition 4.27.** *Le maximum de  $\mu$  sur le type géométrique  $(U_2 \oplus G_3)$  vaut  $4/3$ , réalisé de façon unique à équivalence près dans  $(U_2 \oplus G_3)$ .*

*Preuve.* Pour  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  on pose

$$\theta_3(M) = \begin{pmatrix} d^2 & -c^2 & 2cd & -cd & cd \\ -b^2 & a^2 & -2ab & ab & -ab \\ bd & -ac & ad + bc & \frac{1}{2}(1 - ad - bc) & \frac{1}{2}(ad + bc - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette application induit un isomorphisme de  $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$  sur  $\mathbf{O}_{U_2 G_3}^t(\mathbf{R})_0$ , ainsi qu'un paramétrage équivariant du type  $(U_2 \oplus G_3)$  par  $B_z = \theta_3(M_z) \cdot (I_2 \oplus \Lambda_3)$

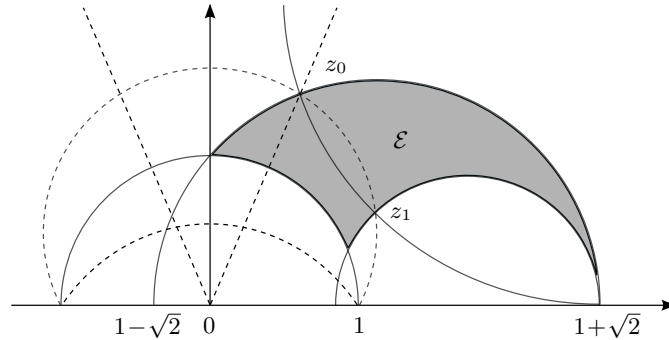


FIGURE 2 – Type géométrique  $(-I_2 \oplus G_3)$

$d$	$FF^\vee$	$n^\circ$	$F$	$(F)$	dim.	t. s.	$\Gamma_F$	$\mu_F$	$C_{eq}$
1	$I_5$	1	$I_5$	$\{I_5\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{G}(5)$	1	1-8,0
		2	$I_{4,1}$	$V_{4,1}$	4	$\mathbf{H}_8^4$	$\mathbf{C}_2$	7/5	max.
		3	$I_{3,2}$	$V_{3,2}$	6	$V_{3,2}$	$\mathbf{C}_2$	$\geq 7/5$	max.
2	$I_{3,2}$	4	$I_3 J_2$	$\{I_3\} P_2$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{G}(3) \mathbf{C}_2$	1	4-6,0
		5	$I_{2,1} J_2$	$V_{2,1} P_2$	4	$\mathbf{H}_8^2 \mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$2/\sqrt{3}$	max.
	$I_{1,4}$	6	$I_1 J_4$	$\{I_1\} \mathfrak{S}_2$	6	$\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{C}_2^2$	1	max.
	$I_1 R_2 R_2$	7	$I_1 F_4$	$(I_1 F_4)$	4	$\mathbf{H}_8^2 \mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	7/5	max.
4	$I_1 J_2 J_2$	8	$I_1 K_4$	$\{I_1\} (K_4)$	2	$\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_8$	1	6,8
		9	$I_1 L_4$	$\{I_1 D_4\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2 \Gamma_{L_4}$	1	3,6-9,11,0
	$I_2 X_3$	10	$I_2 G_3$	$\{I_2 \Lambda_3\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_8^2$	1	2,3,5,10-13
		11	$I_2^- G_3$	$(I_2^- G_3)$	2	$\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_8$	4/3	3,11
		12	$U_2 G_3$	$(U_2 G_3)$	2	$\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_8$	4/3	3,12
	$I_2^- X_3$	13	$J_2 G_3$	$P_2 \{\Lambda_3\}$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2 \mathbf{D}_8$	$2/\sqrt{3}$	5,13
8	$X_5$	14	$F_5$	$\{\Lambda_5'\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_{16}$	$1/\gamma$	3,14

TABLE 10 – Types géométriques principaux de rang 5 (14 types, 5 max.)

( $z \in \mathfrak{H}_1$ ,  $M_z$  est définie en (58)). On voit immédiatement que  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$  agit *via*  $\theta_3$  par équivalence entière sur  $(U_2 \oplus G_3)$ . On peut donc supposer que  $z \in \Delta$  (domaine fondamental standard pour  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ , voir (51)). Noter également que  $I_{3,2}$  agit par équivalence sur  $B_z$  en changeant le signe de  $\Re z$ . La forme  $B_z$  est facile à expliciter, en particulier on trouve  $B_z[\epsilon_1] = 1/(\Im z)^2$ . Par suite on a  $\mu \leq 4/3$  sur  $\Delta$ , avec égalité seulement pour  $z = \frac{1}{2}(\pm 1 + \sqrt{3})$ . Les formes correspondantes sont de minimum  $4/3$  (et équivalentes à la forme  $A_{z_0}$  ci-dessus).

*Remarque 4.28.* Les formes maximisant  $\mu$  sur  $(-I_2 \oplus G_3)$  et  $(U_2 \oplus G_3)$  sont toutes équivalentes. Les deux types se coupent suivant une géodésique commune, donnée respectivement par  $|z+1|^2 = 2$  et par  $|z|^2 = 1$  dans les paramétrages ci-dessus ( $A_z$  et  $B_z$ ); ils ne sont pas équivalents (critère d'inclusion, voir table 10).

**Corollaire 4.29.** *La constante d'Hermite isoduale  $\gamma_5^{\text{isod}}$  est atteinte sur le type orthogonal  $V_{3,2}$  :*

$$\gamma_5^{\text{isod}} = \mu_{3,2} \geq \frac{7}{5}.$$

*Remarque 4.30.* La forme  $\Lambda_5^b \in V_{3,2}$  donnée en (53) est de minimum  $7/5$ . On peut vérifier que c'est un maximum local de  $\mu$  sur le type  $V_{3,2}$  (car parfaite et eutactique relativement à  $V_{3,2}$ , voir par exemple [Bav97, proposition 2.1-(1)]).

## 4.9 Types géométriques principaux de rang 6

En rang 6, il existe 88 types algébriques (table 5), dont 16 vérifient la relation  $[F] = [-F]$ . Il reste donc 52 types algébriques à considérer, parmi lesquels nous trouvons 12 relations :

$$\begin{aligned}
(I_2 \oplus -L_4) &= (I_2 \oplus L_4), & (I_{2,1} \oplus G_3) &= (-I_3 \oplus G_3), \\
(I_3 \oplus H_3) &= (I_3 \oplus G_3), & (J_2 \oplus I_1 \oplus H_3) &= (J_2 \oplus I_1 \oplus G_3), \\
(H_3 \oplus H_3) &= (G_3 \oplus G_3), & (I_1 \oplus H_5) &= (I_1 \oplus K_5) \simeq (I_1 \oplus F_5) = (I_1 \oplus G_5), \\
(-I_1 \oplus H_5) &= (-I_1 \oplus F_5), & (L_6) &= (K_6) \simeq (M_6) = (N_6),
\end{aligned}$$

qui conduisent à une liste de 40 types géométriques principaux (table 11). Cela fait apparaître 11 types maximaux : les types symétriques indéfinis ou symplectique (5 types),  $F \oplus J_2$  pour  $F = I_{3,1}, I_{2,2}, U_4$  et  $F \oplus F_4$  pour  $F = I_2, I_{1,1}, U_2$ .

Les 40 types se distinguent généralement par leur dimension, leur structure métrique, la valeur de  $\mu_F$  et le cardinal du groupe  $\Gamma_F$  (voir table 11). Pour les quelques exceptions restantes on utilise le critère d'inclusion (qui de toutes façons permet de trier tous les types) :  $(I_{3,3})$  et  $(U_6)$  (proposition 4.19, (1)),  $(I_{3,1} \oplus J_2)$  et  $(I_2 \oplus F_4)$  (proposition 4.20) et  $(I_{2,2} \oplus J_2)$ ,  $(U_4 \oplus J_2)$ ,  $(I_{1,1} \oplus F_4)$ ,  $(U_2 \oplus F_4)$  (proposition 4.20).

Il existe un réseau isodual remarquable de rang 6 provenant de la théorie des surfaces de Riemann. On sait que les surfaces de Riemann compactes de genre  $g$  possédant un automorphisme d'ordre  $4g$  sont hyperelliptiques, à l'exception d'une surface de genre 3 dite *surface (ou courbe) de Wiman exceptionnelle*, ou encore *courbe de Picard*. La jacobienne de cette courbe est un réseau symplectique étudié dans [Bav97, QZ98]. On peut l'expliciter comme suit :

$$W_6 = \begin{pmatrix} \delta & 0 & \delta-2 & 1-\delta/2 & -1 & -\delta/2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \delta-2 & 0 & \delta & -\delta/2 & 1 & 1-\delta/2 \\ 1-\delta/2 & -1 & -\delta/2 & \delta & -1 & \delta-2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -\delta/2 & 1 & 1-\delta/2 & \delta-2 & 1 & \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3, \quad \text{où } \delta = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (60)$$

Le minimum de  $W_6$  vaut  $\delta \simeq 1,5773$ , qui semble correspondre à la plus grande densité connue pour un réseau isodual de rang 6. On trouve des formes équivalentes à  $W_6$  dans plusieurs types géométriques (ceux pour lesquels  $\mu_F \geq \delta$ , voir table 11).

La table 11 ne mentionne que l'inclusion des types dans les types maximaux (dernière colonne). L'ordre entre les types principaux est donné par la table 12 ; la valeur 0 signifie que le type est inclus dans un type non principal. Les constantes  $\alpha, \gamma, \delta$  sont définies aux équations (48), (52), (60) et les constantes  $\epsilon, \zeta, \eta$  par

$$\epsilon = 2\sqrt{\frac{5+4\sqrt{3}}{23}} \simeq 1,4403, \quad \zeta = \frac{1+\sqrt{13}}{3} \simeq 1,5351, \quad \eta = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} \simeq 1,4678.$$

Pour compléter l'énoncé du théorème 1.3, noter également que

$$V_{3,3}^{\Pi} = P \cdot V_{3,3} \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_3 & -I_3 \\ I_3 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (61)$$



$d$	$FF^\vee$	$n^o$	$F$	$V_F = (F)$	dim.	type sym.	$\Gamma_F$	$\mu_F$	$\subset \simeq$
1	$I_6$	1	$I_6$	$\{I_6\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{G}(6)$	1	2-6,8-10,14-16
		2	$I_{5,1}$	$V_{5,1}$	5	$\mathbf{H}_8^5$	$\mathbf{C}_2$	3/2	max.
		3	$I_{4,2}$	$V_{4,2}$	8	$V_{4,2}$	$\mathbf{C}_2$	$\geq \delta$	max.
		4	$I_{3,3}$	$V_{3,3}$	9	$V_{3,3}$	$\mathbf{C}_2$	$\geq \delta$	max.
		5	$U_6$	$V_{3,3}^{II}$	9	$V_{3,3}$	$\mathbf{C}_2$	$\geq 3/2$	max.
2	$I_6^-$	6	$J_6$	$\mathfrak{S}_3$	12	$\mathfrak{H}_3$	$\mathbf{C}_2$	$\geq \delta$	max.
		7	$I_4 J_2$	$\{I_4\}P_2$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{G}(4)\mathbf{C}_2$	1	6,8-10
	$I_{4,2}$	8	$I_{3,1}J_2$	$V_{3,1}P_2$	5	$\mathbf{H}_8^3\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$2/\sqrt{3}$	max.
		9	$I_{2,2}J_2$	$V_{2,2}P_2$	6	$(\mathbf{H}_4^2)^2\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$2/\sqrt{3}$	max.
		10	$U_4 J_2$	$V_{2,2}^{II}P_2$	6	$(\mathbf{H}_4^2)^2\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$2/\sqrt{3}$	max.
	$I_{2,4}$	11	$I_2 J_4$	$\{I_2\}\mathfrak{S}_2$	6	$\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{D}_8\mathbf{C}_2$	1	6
		12	$I_{1,1}J_4$	$V_{1,1}\mathfrak{S}_2$	7	$\mathbf{R}\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{C}_2^3$	$2/\sqrt{3}$	6
		13	$U_2 J_4$	$V_{1,1}^{II}\mathfrak{S}_2$	7	$\mathbf{R}\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{C}_2^3$	1	6
	$I_2 R_2 R_2$	14	$I_2 F_4$	$(I_2 F_4)$	5	$\mathbf{H}_8^3\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\geq \delta$	max.
		15	$I_{1,1}F_4$	$(I_{1,1}F_4)$	6	$(\mathbf{H}_4^2)^2\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\geq \zeta$	max.
		16	$U_2 F_4$	$(U_2 F_4)$	6	$(\mathbf{H}_4^2)^2\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\geq \delta$	max.
		17	$F_6$	$(F_6)$	2	$\mathbf{H}_2^2$	384	$\delta$	6,14,16
	$I_2^- R_2 R_2$	18	$J_2 F_4$	$(J_2 F_4)$	7	$\mathbf{R}\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{C}_2^3$	$\geq \delta$	6
4	$I_2 J_2 J_2$	19	$I_2 K_4$	$\{I_2\}(K4)$	2	$\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{D}_8\mathbf{D}_8$	1	6
		20	$I_{1,1}K_4$	$V_{1,1}(K4)$	3	$\mathbf{R}\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$2/\sqrt{3}$	6
		21	$U_2 K_4$	$V_{1,1}^{II}(K4)$	3	$\mathbf{R}\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	1	6
		22	$I_2 L_4$	$\{I_2 D_4\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{D}_8\Gamma_{L_4}$	1	3,4,6,9,14-16
		23	$I_{1,1}L_4$	$V_{1,1}\{D_4\}$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2^2\Gamma_{L_4}$	$2/\sqrt{3}$	4,6,9,15
		24	$U_2 L_4$	$V_{1,1}^{II}\{D_4\}$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2^2\Gamma_{L_4}$	1	4,6,9,16
	$I_2^- J_2 J_2$	25	$J_2 K_4$	$P_2(K4)$	4	$\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$2/\sqrt{3}$	6
		26	$J_2 L_4$	$P_2\{D_4\}$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2\Gamma_{L_4}$	$2/\sqrt{3}$	6,9
	$I_3 X_3$	27	$I_3 G_3$	$\{I_3\Lambda_3\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{G}(3)\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	1	2-4,8,9
		28	$I_3^- G_3$	$(I_3^- G_3)$	3	$\mathbf{H}_8^3$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	7/5	3
		29	$I_{1,2}G_3$	$(I_{1,2}G_3)$	4	$(\mathbf{H}_4^2)^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\sqrt{2}$	4
	$I_{2,1}^- X_3$	30	$J_2 I_1 G_3$	$P_2\{I_1\Lambda_3\}$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	1	8,9
		31	$J_2 I_1^- G_3$	$P_2(I_1^- G_3)$	3	$\mathbf{H}_2^2\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$2/\sqrt{3}$	9
	$X_3 X_3$	32	$G_3 G_3$	$\{\Lambda_3^2\}$	0	$\mathbf{R}^0$	512	$\alpha$	3-6,16
		33	$G_3 H_3$	$(G_3 H_3)$	2	$\mathbf{H}_4^2$	32	$\zeta$	6
		34	$G_3 H_3^-$	$(G_3 H_3^-)$	1	$\mathbf{R}$	256	$\sqrt{2}$	4,6,16
		35	$G_3 G_3^-$	$(G_3 G_3^-)$	3	$\mathbf{R}\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\geq \delta$	6
		36	$G_6$	$(G_6)$	3	$\mathbf{R}\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\geq \epsilon$	6
		37	$H_6$	$(H_6)$	4	$\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\geq \eta$	6
8	$I_1 X_5$	38	$I_1 F_5$	$\{I_1\Lambda_5\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_{16}$	1	3,4
		39	$I_1 F_5^-$	$(I_1 F_5^-)$	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	$1/\gamma$	4
	$Y_6$	40	$K_6$	$\{\Lambda_6\}$	0	$\mathbf{R}^0$	128	$1/\gamma$	4

TABLE 11 – Types géométriques principaux en dimension 6 (40 types, 11 max)

Notre connaissance des constantes  $\mu_F$  n'est que très partielle ; il reste en particulier à déterminer  $\mu_F$  pour 7 des 11 types maximaux. Nous nous contenterons de quelques estimations, permettant notamment de retrouver la non-équivalence de certains types. Pour les types paramétrés par l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}^n$  ( $n$  « petit »), on parvient assez facilement à trouver  $\mu_F$  (voir §4.8). Nous déterminons ainsi  $\mu_F$  pour tous les types ( $F$ ) de dimension  $\leq 2$ , ainsi que pour le type  $(-I_3 \oplus G3)$ , paramétré par  $\mathbf{H}^3$  (en procédant comme dans [Bav07] pour ce dernier cas).

**Proposition 4.31.** *Le maximum de  $\mu$  sur le type  $(F_6)$  vaut  $\delta = 1 + 1/\sqrt{3}$ , réalisé de façon unique à équivalence près dans  $(F_6)$  par une forme équivalente à  $W_6$ .*

*Preuve.* On obtient un isomorphisme  $\theta_4$  entre  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  et la composante neutre du groupe  $\mathbf{O}_{F_6}^t$  en posant

$$\theta_4(M) = I_2 \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a & 1-a & b & -b \\ 1-a & 1+a & -b & b \\ c & -c & 1+d & 1-d \\ -c & c & 1-d & 1+d \end{pmatrix}$$

pour  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ . Ensuite, on paramètre le type comme d'habitude, par exemple en posant  $A_z = \theta_4(M_z) \cdot A_i$  où

$$A_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in (F_6).$$

Le sous-groupe de congruence principal  $\Gamma(2)$  agit *via*  $\theta_4$  par équivalence entière sur le type  $(F_6)$ . On peut donc supposer que le point  $z \in \mathfrak{H}_1$  appartient au quadrilatère hyperbolique de sommets  $-1, 0, 1, \infty$  (domaine fondamental de  $\Gamma(2)$ ) et même que  $\Re z \geq 0$  car l'action de  $I_2 \oplus U_2 \oplus I_2$  sur  $(F_6)$  change  $z$  en  $-\bar{z}$ . Cela étant, on majore facilement  $\mu$  en considérant 3 longueurs

$$\begin{aligned} l_0(z) &= A_z[\epsilon_3] = 1 + \frac{|z|^2}{2\Im z}, & l_1(z) &= A_z[\epsilon_3 - \epsilon_5] = 1 + \frac{|z-1|^2}{2\Im z}, \\ l_\infty(z) &= A_z[\epsilon_5] = 1 + \frac{1}{2\Im z}, \end{aligned}$$

1	0,1-16,18-21,25	15	15	29	4,29
2	2	16	16	30	8,9,30,31
3	3	17	0,6,14,16-18	31	9,31
4	4	18	6,18	32	3-6,16,18,28,29,32-37
5	5	19	6,11-13,19-21,25	33	6,18,33,35
6	6	20	6,12,20,25	34	4,6,16,18,29,34,35,37
7	0,6-13,18,25	21	6,13,21,25	35	6,35
8	8	22	0,3,4,6,9,11-16,18-26,28,29,31	36	6,18,36,37
9	9	23	0,4,6,9,12,15,18,20,23,25,26,29,31	37	6,37
10	10	24	0,4,6,9,13,16,18,21,24-26,29,31	38	3,4,38,39
11	6,11-13	25	6,25	39	4,39
12	6,12	26	0,6,9,18,25,26,31	40	4,29,39,40
13	6,13	27	0,2-4,8,9,27-31		
14	14	28	3,28		

TABLE 12 – Inclusions des types principaux en dimension 6

associées aux pointes 0, 1 et  $\infty$  respectivement. Sur le triangle de sommets 0, 1,  $\infty$ , on a  $\min(l_0(z), l_1(z), l_\infty(z)) \leq \delta$  (voir (57)), avec égalité si et seulement si  $z = z_0 = (1 + i\sqrt{3})/2$ . Enfin la forme  $A_{z_0}$  est équivalente à  $W_6$ .

*Remarque 4.32.* À équivalence près, le type  $(F_6)$  est inclus dans le type symplectique  $\mathfrak{S}_3$ . On peut également vérifier que la forme  $A_i$  ci-dessus est une matrice de Gram de la jacobienne de la quartique de Fermat.

**Proposition 4.33.** *Le maximum de  $\mu$  sur le type géométrique  $(G_3 \oplus H_3)$  vaut  $\zeta = (1 + \sqrt{13})/3 \simeq 1,5351$ , réalisé de façon unique à équivalence près dans  $(G_3 \oplus H_3)$ .*

*Preuve.* On a un morphisme injectif  $\theta_5 : \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{O}_F^t(\mathbf{R})$  ( $F = G_3 \oplus H_3$ ) en posant pour  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$

$$\theta_5(M) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2l(a, b, d; c) - 1 & 1 - l(a, c, d; b) & 0 & -l(b, c, d; a) & -l(a, b, c; d) \\ 0 & a + d & b - c & 0 & a - d & -b - c \\ 0 & c - b & a + d & 0 & b + c & a - d \\ 0 & l(a, b, c; d) & l(b, c, d; a) & 2l(a, c, d; b) - 1 & 1 - l(a, b, d; c) \\ 0 & a - d & b + c & 0 & a + d & c - b \\ 0 & -b - c & a - d & 0 & b - c & a + d \end{pmatrix},$$

avec  $l(a, b, c; d) = (a + b + c - d)/2$ . L'image de  $\theta_5$  agit transitivement sur le type  $(G_3 \oplus H_3)$ . On peut noter que le groupe  $\mathbf{O}_F^t(\mathbf{R})$  a 8 composantes connexes (voir proposition 3.4, c)) et que  $\theta_5$  s'étend en un morphisme surjectif de noyau  $\{\pm 1\}$  de  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  sur  $\mathbf{O}_F^t(\mathbf{R})_0$ , morphisme correspondant au revêtement double  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(1, 1) \rightarrow \mathbf{U}(1, 1)$ . Le type est paramétré par  $B_z = \theta_5(M_z) \cdot (\Lambda_3 \oplus \Lambda_3)$  (voir eqs. 47 et 58) avec  $z \in \mathfrak{H}_1$ . Posons  $\Gamma = \theta_5^{-1}(\mathbf{GL}_6(\mathbf{Z}) \cap \mathbf{O}_F^t(\mathbf{R}))$ , sous-groupe discret de  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ . L'expression de  $\theta_5$  montre que

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad \begin{pmatrix} 2 & 8k + 3 \\ 1 & 4k + 2 \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4k \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Toute orbite de  $\Gamma$  contient un point  $z \in \mathfrak{H}_1$  avec  $\Im \gamma(z)$  maximum (les orbites de  $\Gamma$  ne s'accumulent pas sur les pointes du groupe, voir la preuve de la proposition 4.26), c'est-à-dire avec  $|cz + d|^2 \geq 1$  pour tout  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ . Grâce aux éléments ci-dessus, on peut prendre  $z$  extérieur aux disques de rayon 1 centrés aux points réels  $2k$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) avec de plus  $|\Re z| \leq 2$ . Ce domaine peut être réduit par les actions entières de  $U_6$  qui change le signe de  $\Re z$  ( $U_6 \cdot B_z = B_{\bar{z}}$ ) et de

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'action de  $S_0$  sur  $(G_3 \oplus H_3)$  coïncide avec celle de  $\theta_5(M_0)$  (non entière) pour  $M_0 = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ , élément elliptique d'ordre 2 fixant  $z_0 = 1 + i\sqrt{2}$ . Finalement, on peut supposer que  $z \in \mathcal{F} = \{z \in \mathfrak{H}_1; 0 \leq \Re z \leq 2, |z - 1|^2 \geq 2\}$  (figure 3). La majoration de  $\mu$  est obtenue grâce aux fonctions suivantes :

$$\begin{cases} l_1 = B_z[\epsilon_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{|z-i|^2}{2\Im z}) + \frac{1}{2}, \\ l_2 = B_z[\epsilon_2 - \epsilon_4] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{|z-(2+i)|^2}{2\Im z}) + \frac{1}{2}, \\ l_3 = B_z[\epsilon_2 - \epsilon_5] = \frac{2\sqrt{2}}{\Im z}, \end{cases}$$

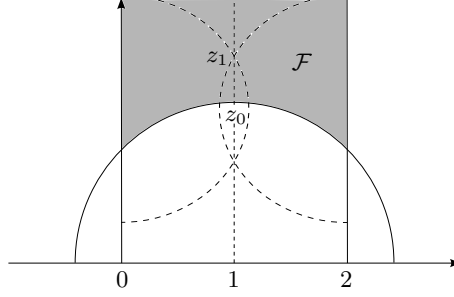


FIGURE 3 – Type géométrique  $(G_3 \oplus H_3)$

où  $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq 6}$  désigne la base naturelle de  $\mathbf{Z}^6$ . Soit  $z_1 = 1 + i(\sqrt{13} - 1)/\sqrt{2}$ . Le minimum de la forme  $B_{z_1}$  vaut  $l_j(z_1) = (1 + \sqrt{13})/3$  ( $j = 1, 2, 3$ ). De plus, les fonctions  $l_1$  et  $l_2$  s'expriment au moyen des distances respectives  $d_1$  et  $d_2$  aux points  $i$  et  $(2 + i)$  par  $l_j = (\sqrt{2}d_j + 1)/2$  ( $j = 1, 2$ ) (on rappelle que la distance  $d_{z,w}$  entre  $z, w \in \mathfrak{H}_1$  est donnée par  $2\Im z \Im w (\cosh d_{z,w} - 1) = |z - w|^2$ ). Par suite on a  $\min(l_1, l_2, l_3) \leq (1 + \sqrt{13})/3$  sur le domaine  $\mathcal{F}$  avec égalité au point  $z_1$  uniquement (voir figure 3).

*Remarque 4.34.* Comme  $(F_6)$ , le type  $(G_3 \oplus H_3)$  est inclus dans le type symplectique  $\mathfrak{S}_3$  (voir rem. 4.32). La forme  $B_{z_0}$  correspond à la jacobienne de la quartique de Fermat.

**Proposition 4.35.** *Le maximum de  $\mu$  sur le type  $(-I_3 \oplus G_3)$  vaut  $7/5$ , réalisé de façon unique à équivalence près dans  $(-I_3 \oplus G_3)$ .*

*Preuve.* Nous procédons suivant la méthode de [Bav07, §§1.3-1.4]. Soit  $PC_f^-$  le projectifié du cône négatif (dans  $\mathbf{R}^4$ ) de la forme  $f = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ . Le type  $V_F$  ( $F = -I_3 \oplus G_3$ ) est l'image d'un plongement de  $PC_f^-$  dans  $P_6$ , équivariant pour un certain morphisme  $\theta_6 : \mathbf{O}_f(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{GL}_6^\pm(\mathbf{R})$  (voir ci-dessous). En utilisant les réflexions du groupe  $\Pi = \theta_6^{-1}(\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}))$ , on se ramène à un polyèdre hyperbolique, ici une pyramide  $\mathcal{P}$ . La détermination de  $\mu_F$  résulte alors d'un simple découpage de  $\mathcal{P}$  (ici en deux sous-pyramides).

Notons  $[x, y, z, t]$  les coordonnées homogènes de  $\mathbf{PR}^4$ . La forme polaire de  $f$  sera simplement notée  $u \cdot v$  ( $u, v \in \mathbf{R}^4$ ). Pour  $p = [x, y, z, t] \in PC_f^-$ , posons  $\psi(p) = (x/t, y/t, z/t)'$ , puis

$$\varphi(p) = Q_0 \cdot (\varphi_{3,1} \circ \psi(p) \oplus I_2) \quad \text{où} \quad Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2} & -2^{-3/4} & 2^{-3/4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{1/4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{1/4} & 0 \end{pmatrix},$$

le plongement  $\varphi_{p,q}$  étant défini en (38). On obtient un paramétrage de  $V_F$ , équivariant pour  $\theta_6 : \mathbf{O}_f(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{GL}_6^\pm(\mathbf{R})$  défini par  $\theta_6(P) = Q_0(P \oplus I_2)Q_0^{-1}$ . À tout vecteur positif  $e \in \mathbf{R}^4$  est associée la réflexion  $R_e = I_4 - 2eI_{3,1}e'/e \cdot e$ . Pour les vecteurs suivants

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1, 0)', & e_3 &= (-1, 1, 0, 0)', & e_5 &= (1, 0, 0, 1/\sqrt{2})', \\ e_2 &= (0, -1, 1, 0)', & e_4 &= (1, 1, 1, \sqrt{2})', \end{aligned}$$

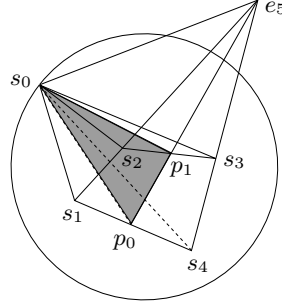


FIGURE 4 – Type géométrique  $(-I_3 \oplus G_3)$

on constate que les réflexions  $R_{e_i}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) appartiennent à  $\Pi = \theta_6^{-1}(\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}))$ . Plus précisément, les  $\theta_6(R_{e_i})$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) sont donnés respectivement par  $I_{1,1} \oplus I_4$ ,  $I_1 \oplus U_2 \oplus I_3$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_3, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'action du sous-groupe  $\Pi' \subset \Pi$  engendré par les  $R_{e_i}$  admet comme domaine fondamental le polyèdre  $\mathcal{P}$  défini par les équations  $p \cdot e_i \leq 0$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), c'est-à-dire  $0 \leq z \leq y \leq x$ ,  $x + y + z \leq \sqrt{2}t$  et  $x \leq t/\sqrt{2}$ . Combinatoirement  $\mathcal{P}$  est une pyramide (cône sur un produit de simplexes) dont le sommet est le point à l'infini  $s_0 = [1, 1, 0, \sqrt{2}]$ ; la base de  $\mathcal{P}$  est engendrée par les points  $s_1 = [0, 0, 0, 1]$ ,  $s_2 = [1, 0, 0, \sqrt{2}]$ ,  $s_3 = [1, 1/2, 1/2, \sqrt{2}]$  et  $s_4 = [1, 1, 1, 3/\sqrt{2}]$  (voir figure 4). Pour  $p_0 = [1, 1, 1, 4\sqrt{2}]$ , on trouve une forme de minimum  $7/5$  avec 4 longueurs minimales  $l_i(p) = 1 - 2(p \cdot e_i)^2/p \cdot p$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), qui varient comme les distances aux faces correspondantes.

Découpons  $\mathcal{P}$  par  $l_4 = l_1$  (plan médiateur des faces  $x + y + z - \sqrt{2}t = 0$  et  $z = 0$ ). Pour majorer les fonctions convexes  $l_i$  sur un polyèdre convexe, il suffit de les évaluer aux points extrémaux, c.-à-d. aux sommets (voir [Bav07]). Le découpage scinde  $\mathcal{P}$  en deux pyramides de sommets respectifs  $(s_0, s_1, s_2, p_1, p_0)$  et  $(s_0, p_0, p_1, s_3, s_4)$ , avec  $p_1 = [1, 1/3, 1/3, \sqrt{2}]$  (voir fig 4). La forme correspondante à  $p_1$  est de minimum  $8/7 < 7/5$ . Par suite, pour  $p \in \mathcal{P} \setminus \{p_0\}$ , on a  $l_1(p) < 7/5$  d'un côté de  $l_1 = l_4$  et  $l_4(p) < 7/5$  de l'autre côté, d'où le résultat.

#### 4.10 Types géométriques principaux de rang 7

La classification des types algébriques principaux de rang 7 (tables 6 et 7) fait apparaître 83 paires  $\{[F], [-F]\}$ . Parmi les types géométriques correspondant

nous trouvons 39 relations :

$$\begin{array}{ll}
(F \oplus -L_4) = (F \oplus L_4) & F = I_3, I_{2,1}, I_1 \oplus J_2, \\
(-I_4 \oplus G_3) = (I_{3,1} \oplus G_3), & (I_{1,3} \oplus G_3) = (I_{2,2} \oplus G_3), \\
(F \oplus H_3) = (F \oplus G_3) & F = I_4, U_4, J_4, F_4, K_4, \\
(J_2 \oplus F \oplus H_3) = (J_2 \oplus F \oplus G_3) & F = \pm I_2, U_2, \\
(I_1 \oplus H_3 \oplus H_3) = (I_1 \oplus G_3 \oplus G_3) & (I_1 \oplus -G_3 \oplus H_3) = (I_1 \oplus -G_3 \oplus -G_3) \\
(F_7) = (G_7), & (L_4 \oplus H_3) = (-L_4 \oplus G_3), \\
(F \oplus G) = (F \oplus F_5) & F = I_2, U_2, G = H_5, G_5, K_5, \\
(F) = (I_{1,1} \oplus F_5) & F = -I_2 \oplus F_5, I_{1,1} \oplus H_5, -I_2 \oplus H_5, \\
(J_2 \oplus F) = (J_2 \oplus F_5) & F = H_5, G_5, K_5, \\
(I_1 \oplus F) = (I_1 \oplus K_6) & F = -K_6, \pm L_6, \pm M_6, \pm N_6, \\
(F) \simeq (H_7) & F = K_7, L_7, M_7,
\end{array}$$

dont beaucoup proviennent de types scindés (voir proposition 3.4-b) ou des dimensions inférieures. Finalement, cela conduit à 44 types géométriques principaux en dimension 7 (table 13), dont 12 sont maximaux (voir également la table 14 des inclusions) : les 3 types symétriques indéfinis,  $F \oplus J_2$  ( $F = I_{4,1}, I_{3,2}$ ),  $I_{2,1} \oplus J_4$ ,  $I_1 \oplus J_6$ ,  $F \oplus F_4$  ( $F = I_3, I_{2,1}, I_1 \oplus J_2$ ) et  $F \oplus G_3$  ( $F = I_1 \oplus G_3^-, K_4$ ).

L'analyse de la table 13 montre que les types sont généralement différenciés par leur structure métrique, le cardinal du groupe  $\Gamma_F$  et les estimations de la constante  $\mu_F$ . Il y a 4 exceptions :  $(I_2 \oplus F_5)$  et  $(I_1 \oplus K_6)$  (types 39 et 43) de dimension 0 qui n'ont pas le même nombre de vecteurs minimaux, et 3 paires que l'on peut distinguer par le critère d'inclusion (proposition 4.18) :  $(F \oplus G_3)$  avec  $F \in \{I_{2,2}, U_4\}$  (types 23,24),  $(J_2 \oplus F \oplus G_3)$  avec  $F \in \{I_2^-, U_2\}$  (types 26,27) et  $(F \oplus F_5)$  avec  $F \in \{I_{1,1}, U_2\}$  (types 40,41).

Le calcul de  $\mu_F$  est immédiat pour les types de dimension 0 et pour les types scindés. Ensuite, certains types, non forcément scindés, possèdent des termes diagonaux constants. Ainsi  $a_{7,7} = \sqrt{2}$  pour  $A = (a_{ij}) \in V_F$ ,  $F = G \oplus G_3$  ( $G = I_{3,1}, I_{2,2}, U_4$ ),  $I_1 \oplus G_3^- \oplus G_3^-$ ,  $F_4 \oplus G_3$  et  $F_7$  (types 22,23,24,31,35 et 36) ; on trouve alors assez facilement un point (généralement non isolé) de minimum  $\sqrt{2}$  dans le type, d'où  $\mu_F = \sqrt{2}$ . Nous n'incluons pas les détails car ces types ne sont pas maximaux. Un phénomène analogue a lieu pour  $F = I_1 \oplus G_3 \oplus H_3$  (type 32, en fait scindé) avec  $\mu_F = 1$  et pour  $F = G \oplus F_5$  ( $G = I_{1,1}, U_2$ , types 40,41) avec  $\mu_F = \nu$  où

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \simeq 1,3065. \quad (62)$$

Il reste à déterminer  $\mu_F$  pour 7 (sur 12) des types maximaux et d'un type non maximal ( $I_1 \oplus G_6$ ) inclus dans le type maximal ( $I_1 \oplus J_2 \oplus F_4$ ). Pour chacun de ces types, nous indiquons dans la table 13 un maximum local de densité. Voici pour terminer quelques précisions sur ces cas.

Rappelons d'abord que la densité maximale du type symétrique « lorentzien » est déterminée dans [Bav07] (théorème 1 p. 44) : elle correspond à  $\mu_{6,1} = 5/3$ ,

$d$	$FF^\vee$	$n^\circ$	$F$	$V_F = (F)$	dim.	type	sym.	$\Gamma_F$	$\mu_F$	$\subset_\sim$
1	$I_7$	1	$I_7$	$\{I_7\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{G}(7)$	$\mathbf{C}_2$	1	2-4,6,7,9-12,14
		2	$I_{6,1}$	$V_{6,1}$	6	$\mathbf{H}_8^6$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_2$	5/3	max.
		3	$I_{5,2}$	$V_{5,2}$	10	$V_{5,2}$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_2$	$\geq 5/3$	max.
		4	$I_{4,3}$	$V_{4,3}$	12	$V_{4,3}$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_2$	$\geq 5/3$	max.
2	$I_{5,2}$	5	$I_5 J_2$	$\{I_5\}P_2$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{G}(5)\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_2^2$	1	6,7,9,10,14
		6	$I_{4,1}J_2$	$V_{4,1}P_2$	6	$\mathbf{H}_8^4\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$2/\sqrt{3}$	max.
		7	$I_{3,2}J_2$	$V_{3,2}P_2$	8	$V_{3,2}\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$2/\sqrt{3}$	max.
	$I_{3,4}$	8	$I_3 J_4$	$\{I_3\}\mathfrak{S}_2$	6	$\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{G}(3)\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_2^2$	1	9,10
		9	$I_{2,1}J_4$	$V_{2,1}\mathfrak{S}_2$	8	$\mathbf{H}_8^2\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\alpha$	max.
	$I_{1,6}$	10	$I_1 J_6$	$\{I_1\}\mathfrak{S}_3$	12	$\mathfrak{H}_3$	$\mathbf{C}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	1	max.
	$I_3 R_2 R_2$	11	$I_3 F_4$	$(I_3 F_4)$	6	$\mathbf{H}_8^4\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\geq 5/3$	max.
		12	$I_{2,1}F_4$	$(I_{2,1}F_4)$	8	$V_{3,2}\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\geq 5/3$	max.
		13	$I_1 F_6$	$\{I_1\}(F_6)$	2	$\mathbf{H}_2^2$	768	$\mathbf{C}_2^2$	1	10-12,14
	$I_{1,2}R_2 R_2$	14	$I_1 J_2 F_4$	$(I_1 J_2 F_4)$	8	$\mathbf{H}_8^2\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2$	$\geq 5/3$	max.
4	$I_3 J_2 J_2$	15	$I_3 K_4$	$\{I_3\}(K_4)$	2	$\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{G}(3)\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	1	9,10
		16	$I_{2,1}K_4$	$V_{2,1}(K_4)$	4	$\mathbf{H}_8^2\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\alpha$	9
		17	$I_3 L_4$	$\{I_3 D_4\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{G}(3)\Gamma_{L_4}$	$\mathbf{C}_2\Gamma_{L_4}$	1	3,4,7,9-12,14
		18	$I_{2,1}L_4$	$V_{2,1}\{D_4\}$	2	$\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2\Gamma_{L_4}$	$\mathbf{C}_2\Gamma_{L_4}$	$\alpha$	4,9,12
	$I_{1,2}J_2 J_2$	19	$I_1 J_2 K_4$	$\{I_1\}P_2(K_4)$	4	$\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	1	10
		20	$I_1 J_2 L_4$	$\{I_1\}P_2\{D_4\}$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2\Gamma_{L_4}$	$\mathbf{C}_2^2\Gamma_{L_4}$	1	7,10,14
	$I_4 X_3$	21	$I_4 G_3$	$\{I_4 \Lambda_3\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{G}(4)\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	1	2-4,6,7,9,12,37
		22	$I_{3,1}G_3$	$(I_{3,1}G_3)$	4	$\mathbf{H}_8^4$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\sqrt{2}$	3
		23	$I_{2,2}G_3$	$(I_{2,2}G_3)$	6	$V_{3,2}$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\sqrt{2}$	4
		24	$U_4 G_3$	$(U_4 G_3)$	6	$V_{3,2}$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\sqrt{2}$	4
	$I_{2,2}^- X_3$	25	$J_2 I_2 G_3$	$P_2\{I_2 \Lambda_3\}$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8^2$	1	6,7,9
		26	$J_2 I_2^- G_3$	$P_2(I_2^- G_3)$	4	$\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$2/\sqrt{3}$	7
		27	$J_2 U_2 G_3$	$P_2(U_2 G_3)$	4	$\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$2/\sqrt{3}$	7
	$I_4^- X_3$	28	$J_4 G_3$	$\mathfrak{S}_2\{\Lambda_3\}$	6	$\mathfrak{H}_2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\alpha$	9
	$I_1 X_3 X_3$	29	$I_1 G_3 G_3$	$\{I_1 \Lambda_3^2\}$	0	$\mathbf{R}^0$	1024	$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_4$	1	3,4,10,12,14,30
		30	$I_1 G_3 G_3^-$	$(I_1 G_3 G_3^-)$	4	$\mathbf{H}_8^2\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_4$	$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_4$	$\geq 5/3$	max.
		31	$I_1 G_3^- G_3^-$	$(I_1 G_3^- G_3^-)$	2	$\mathbf{H}_8^2$	128	$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_4$	$\sqrt{2}$	4,30
		32	$I_1 G_3 H_3$	$(I_1 G_3 H_3)$	2	$\mathbf{H}_4^2$	64	$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_4$	1	10,14,30
		33	$I_1 G_6$	$(I_1 G_6)$	4	$\mathbf{H}_8^2\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\geq \psi$	14
	$I_1 X_3^- X_3^-$	34	$I_1 H_6$	$\{I_1\}(H_6)$	4	$\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_4^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	1	10
	$R_2 R_2 X_3$	35	$F_4 G_3$	$(F_4 G_3)$	4	$\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_8$	$\sqrt{2}$	12
		36	$F_7$	$(F_7)$	2	$\mathbf{H}_2^2$	128	$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_4$	$\sqrt{2}$	11,12
	$J_2 J_2 X_3$	37	$K_4 G_3$	$(K_4 G_3)$	4	$W_{2,1}$	$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_4$	$\mathbf{C}_2\mathbf{C}_4$	$\geq \varphi$	max.
		38	$L_4^- G_3$	$\{D_4 \Lambda_3\}$	0	$\mathbf{R}^0$	18432	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_8$	$\alpha$	4,9,12,30,37
8	$I_2 X_5$	39	$I_2 F_5$	$\{I_2 \Lambda_5\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{D}_8\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	1	3,4,7
		40	$I_{1,1}F_5$	$(I_{1,1}F_5)$	2	$\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	$\nu$	4
		41	$U_2 F_5$	$(U_2 F_5)$	2	$\mathbf{H}_8^2$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	$\nu$	4
	$I_2^- X_5$	42	$J_2 F_5$	$\mathfrak{S}_2\{\Lambda_5\}$	2	$\mathbf{H}_2^2$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{C}_2^2\mathbf{D}_{16}$	$2/\sqrt{3}$	7
	$I_1 Y_6$	43	$I_1 K_6$	$\{I_1 \Lambda_6\}$	0	$\mathbf{R}^0$	256	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	1	4
	$T_7$	44	$H_7$	$\{\Lambda_7'\}$	0	$\mathbf{R}^0$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{16}$	$\omega$	4

TABLE 13 – Types géométriques principaux en dimension 7 (44 types, 12 max.)

réalisée de façon unique à équivalence près par la forme

$$\Lambda_7 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Cette forme admet des points équivalents dans les types maximaux  $V_{5,2}$ ,  $V_{4,3}$ ,  $F \oplus F_4$  ( $F = I_3, I_{2,1}, I_1 \oplus J_2$ ) et  $I_1 \oplus G_3^- \oplus G_3$ ; dans chaque cas on vérifie, grâce notamment à la proposition 4.7, qu'il s'agit d'un maximum local.

Le dernier type maximal non évoqué ci-dessus,  $(K_4 \oplus G_3)$ , est métriquement intéressant car il s'agit d'un plan hyperbolique complexe. En réduisant son type algébrique sur les réels, on trouve que

$$(K_4 \oplus G_3) = P_4 \cdot (I_1 \oplus W_{2,1}),$$

où  $P_4$  est donné par (72) et  $W_{2,1}$  est paramétré explicitement par un couple  $(z, w)$  de nombres complexes tels que  $|z|^2 + |w|^2 < 1$  *via* les équations (31), (42) et (43), à savoir  $W_{2,1} = \{\kappa(H_{z,w}); |z|^2 + |w|^2 < 1\}$  avec

$$H_{z,w} = \frac{1}{1 - |z|^2 - |w|^2} \begin{pmatrix} 1 + |z|^2 - |w|^2 & 2z\bar{w} & 2z \\ 2\bar{z}w & 1 - |z|^2 + |w|^2 & 2w \\ 2\bar{z} & 2\bar{w} & 1 + |z|^2 + |w|^2 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\begin{cases} \varphi = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \simeq 1,5176, \\ 97z_0 = -36 - 113i + (10 + 26i)\varphi + (31 + 197i)\frac{\varphi^2}{2} + (1 - 75i)\frac{\varphi^3}{2} \\ 97w_0 = 16 + 61i + (-26 + 10i)\varphi + (47 - 130i)\varphi^2 + (-11 + 49i)\varphi^3. \end{cases} \quad (63)$$

Alors la forme  $\kappa(H_{z_0, w_0}) \in (K_4 \oplus G_3)$  est de minimum  $\varphi$  et possède 10 couples de vecteurs minimaux. On vérifie par la méthode habituelle (proposition 4.7) qu'elle atteint un maximum local (isolé) de densité sur le type  $(K_4 \oplus G_3)$ .

1	0-12,14-16,19	16	9,16	31	4,23,30,31
2	2	17	0,3,4,7-12,14-20,22,23,26	32	10,14,30,32
3	3	18	0,4,9,12,16,18,23	33	14,33
4	4	19	10,19	34	10,34
5	0,5-10,14,19	20	0,7,10,14,19,20,26	35	12,35
6	6	21	0,2-4,6,7,9,12,16,21-28,35,37	36	11,12,35,36
7	7	22	3,22	37	37
8	0,8-10	23	4,23	38	0,4,9,12,16,18,
9	9	24	4,24		23,28,30,31,35,37,38
10	10	25	6,7,9,25-28	39	3,4,7,39-42
11	11	26	7,26	40	4,40
12	12	27	7,27	41	4,41
13	0,10-14	28	9,28	42	7,42
14	14	29	3,4,10,12,14,22,23,29-34	43	4,23,40,43
15	0,8-10,15,16,19	30	30	44	4,44

TABLE 14 – Inclusions des types principaux en dimension 7



Enfin, il reste à commenter le cas du type non maximal  $(I_1 \oplus G_6)$  (type 33, inclus à équivalence près dans  $(I_1 \oplus J_2 \oplus F_4)$ ), que l'on peut paramétrer par  $(I_1 \oplus G_6) = \{A_{X,z}; (X,z) \in \mathcal{V}_{2,1} \times \mathfrak{H}_1\}$  avec

$$A_{X,z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2^{3/4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{3/4} & 0 & -2^{3/4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{3/4} & 0 & 2^{3/4} \\ 0 & 1 & -1 & -2^{3/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2^{3/4} & 0 & -2^{3/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{3/4} & 0 & -2^{3/4} & 0 \end{pmatrix} \cdot (\varphi_{2,1}(X) \oplus \sigma_1(z) \oplus \sigma_1(z))$$

(voir les équations (35), (37) et (38)). Soient  $\psi, \psi'$  et  $\psi''$  définis par

$$\begin{cases} 63\psi^4 - 64\psi^3 - 116\psi^2 + 128\psi - 36 = 0 & \text{et } \psi \text{ réel} > 0, \\ 144\psi' = -198 + 404\psi + 65\psi^2 - 126\psi^3, \\ \psi'' = 2\psi - 2\psi' - 1, \end{cases} \quad (64)$$

et soit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2\psi - 1 & \psi' & 0 & 0 & -\psi' & 0 & 0 \\ \psi' & \psi & \psi/2 & -\psi/2 & (1-\psi)/2 & \psi'' & \psi'' \\ 0 & \psi/2 & \psi & 0 & -\psi'' & 0 & 2\psi'' \\ 0 & -\psi/2 & 0 & \psi & -\psi'' & -2\psi'' & 0 \\ -\psi' & (1-\psi)/2 & -\psi'' & -\psi'' & \psi & \psi/2 & -\psi/2 \\ 0 & \psi'' & 0 & -2\psi'' & \psi/2 & \psi & 0 \\ 0 & \psi'' & 2\psi'' & 0 & -\psi/2 & 0 & \psi \end{pmatrix}.$$

Alors  $A_0 \in (I_1 \oplus G_6)$  est une forme de minimum  $\psi \simeq 1,5101$  et possédant 16 couples de vecteurs minimaux. On vérifie qu'il s'agit d'un maximum local de densité (isolé) sur le type  $(I_1 \oplus G_6)$ .

Précisons également que la forme  $\Lambda'_7$  (type 44) est donnée par

$$\Lambda'_7 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} + c & \sqrt{2} + a & -\sqrt{2} - a & -b & -c & -c & -b \\ \sqrt{2} + a & 2\sqrt{2} + 2a & b & -2b & -2a & 0 & 2a \\ -\sqrt{2} - a & b & 2\sqrt{2} + 2a & -2a & 0 & 2a & 2b \\ -b & -2b & -2a & 4a & 2b & 0 & -2b \\ -c & -2a & 0 & 2b & 4a & 2b & 0 \\ -c & 0 & 2a & 0 & 2b & 4a & 2b \\ -b & 2a & 2b & -2b & 0 & 2b & 4a \end{pmatrix}$$

avec  $a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$  et  $c = \sqrt{20 + 2\sqrt{2}}$ . Elle possède 8 couples de vecteurs minimaux et son minimum vaut

$$\omega = \frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \right) \simeq 1,2568. \quad (65)$$

Les constantes  $\alpha, \psi, \varphi, \nu$  et  $\omega$  de la table 13 sont définies aux équations (48), (64), (63), (62) et (65) respectivement. Enfin, les inclusions entre les types géométriques principaux en dimension 7 sont données dans la table 14.

## Annexe : données numériques

Signalons d'abord quelques conventions générales. Dans les tables, la somme directe  $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  sera notée multiplicativement pour abréger :  $AB$  pour  $A \oplus B$ ,  $A^2$  pour  $A \oplus A$  et  $A^-$  pour  $-A$ . La matrice identité d'ordre  $n$  est notée  $I_n$ . On pose  $I_{p,q} = I_p \oplus (-I_q)$  et  $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ . Enfin pour  $p$  premier on définit

$$R_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{p-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad V_{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ I_{p-2} & \vdots \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad W_{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ & 1 \\ I_{p-2} & \vdots \\ & -1 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

### A1 Éléments d'ordre fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$

$n$	$d$	$\det = 1$	$\det = -1$	$N_{n,d}$
1	2		$I_1^{-*}$	1
2	2	$I_2^-$	$I_{1,1}, R_2^*$	3
	3	$V_2^*$		1
	4	$J_2^*$		1
	6	$W_2^*$		1
3	2	$I_{1,2}, I_1^- R_2$	$I_{2,1}, I_1 R_2, I_3^-$	5
	3	$I_1 V_2, R_3^*$		2
	4	$I_1 J_2, X_3^*$	$I_1^- J_2, X_3^{-*}$	4
	6	$I_1 W_2$	$I_1^- W_2, I_1^- V_2, R_3^{-*}$	4
4	2	$I_4^-, I_{2,2}, I_{1,1} R_2, R_2^2$	$I_{3,1}, I_{1,3}, I_2 R_2, I_2^- R_2$	8
	3	$I_2 V_2, I_1 R_3, V_2^2$		3
	4	$I_2 J_2, I_2^- J_2, J_4, I_1 X_3, I_1^- X_3^-$	$I_{1,1} J_2, R_2 J_2, I_1 X_3^-,$ $I_1^- X_3, Z_4^*, Z_4'^*, Z_4''^*$	12
	5	$V_4^*$		1
	6	$I_2 W_2, I_2^- W_2, I_2 V_2, I_1^- R_3^-,$ $V_2 W_2, W_2^2, T_4^*$	$I_{1,1} V_2, R_2 V_2, I_1^- R_3, T_4'^*,$ $I_{1,1} W_2, R_2 W_2, I_1 R_3^-, T_4''^*$	15
	8	$X_4^*$		1
	10	$W_4^*$		1
	12	$V_2 J_2, W_2 J_2, Y_4^*$		3

TABLE 15 – Éléments d'ordre fini  $d \geq 2$  de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  ( $1 \leq n \leq 4$ )

Dans les tables 15 et 16 l'entier  $d$  désigne l'ordre des éléments ( $d = 1$  n'est pas rappelé) ; les indécomposables sont signalés par un astérisque (\*). Noter qu'en dimension  $n$  impaire, les éléments de déterminant 1 correspondent bijectivement à ceux de déterminant -1. On pose

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_4 = \begin{pmatrix} I_{1,1} & E_{2,2}' \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad Z_4' = \begin{pmatrix} R_2 & E_{2,2}' \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad Z_4'' = \begin{pmatrix} R_2 & E_{2,2}' \\ 0 & J_2 \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} V_2 & E_{2,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}, T'_4 = \begin{pmatrix} R_2 & E_{2,2} \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}, T''_4 = \begin{pmatrix} R_2 & E_{2,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix},$$

avec  $E_{r,s} = e_{r,s}^{r,s}$  et  $E'_{r,s} = e_{r,s}^{r,s} + e_{r,s}^{r-1,s}$ , où  $e_{r,s}^{i,j} = (\delta_k^i \delta_l^j)_{k,l} \in M_{r,s}(\mathbf{Z})$  (matrice élémentaire).

Pour les dimensions supérieures, posons

$$\begin{aligned} X_5 &= \begin{pmatrix} 1 & E_{1,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, X_6 = \begin{pmatrix} J_2 & E_{2,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, Y_6 = \begin{pmatrix} J_2 & E'_{2,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, Z_6 = \begin{pmatrix} I_{1,1} & E'_{2,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, \\ Z'_6 &= \begin{pmatrix} R_2 & E_{2,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, Z''_6 = \begin{pmatrix} R_2 & E'_{2,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, X_7 = \begin{pmatrix} J_2 & E_{2,5} \\ 0 & X_5 \end{pmatrix}, Y_7 = \begin{pmatrix} J_2 & E'_{2,5} \\ 0 & X_5 \end{pmatrix}, \\ Z_7 &= \begin{pmatrix} X_3 & E_{3,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, Z'_7 = \begin{pmatrix} X_3 & e_{3,4}^{1,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, Z''_7 = \begin{pmatrix} X_3 & E'_{3,4} \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$d$	$n$	$\det = 1$	$\det = -1$	$N_{n,d}$
2	5, 6, 7	$I_{p,q}R_2^r, \quad q+r > 0,$	$\det = (-1)^{q+r}$	11, 15, 19
4	5, 6, 7	$I_{p,q}R_2^r J_2^s X_3^t X_3^{-u} Z_4^v Z_4'^w Z_4''^x$ $s+t+u+v+w+x > 0, \quad \det = (-1)^{q+r+u+v+w+x}$		24, 48, 84
8	5	$I_1 X_4, X_5$	$I_1^- X_4^-, X_5^-$	4
	6	$I_2 X_4, I_2^- X_4, I_1 X_5, I_1^- X_5^-, J_2 X_4, X_6^*, Y_6^*$	$I_{1,1} X_4, I_1 X_5^-, I_1^- X_5^-, R_2 X_4, Z_6^*, Z_6'^*, Z_6''^*$	14
	7	$I_{p,q} X_4, I_{p,q} X_5 \text{ (} q \text{ pair)}, I_1^- R_2 X_4, I_1 J_2 X_4, I_{1,1} X_5^-, R_2 X_5^-, J_2 X_5, I_1 X_6, I_1 Y_6, I_1^- Z_6, I_1^- Z_6', I_1^- Z_6'', X_3 X_4, X_7^*, Y_7^*, Z_7^*, Z_7'^*, Z_7''^*$	$-X$ $(X \in \mathbf{SL}_7(\mathbf{Z}), \text{ ordre } 8)$	40

TABLE 16 – Éléments d'ordre  $2^k \geq 2$  de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z})$  ( $5 \leq n \leq 7$ )

## A2 Types algébriques indécomposables

**Rang  $\leq 2$  :**  $\pm I_1, U_2, J_2, \pm F_2$ , avec

$$I_1 = (1), U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

**Rang 3 :**  $\pm F_3, \pm G_3$  et  $\pm H_3$ , avec

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

**Rang 4 :**  $F_4, \pm G_4, H_4, K_4, \pm L_4, \pm M_4, \pm N_4, \pm O_4$ , avec

$$\begin{aligned}
F_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_4 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & H_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & M_4 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
N_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & O_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{68}$$

**Rang 5 (principaux) :**  $\pm F_5, \pm G_5, \pm H_5, \pm K_5$ , avec

$$\begin{aligned}
F_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
H_5 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & K_5 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{69}$$

**Rang 6 (principaux) :**  $\pm F_6, G_6, H_6, \pm K_6, \pm L_6, \pm M_6, \pm N_6$ , avec

$$\begin{aligned}
F_6 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & G_6 &= \begin{pmatrix} 0 & G_3 \\ G_3 & 0 \end{pmatrix}, \\
& & H_6 &= \begin{pmatrix} 0 & H_3 \\ -H_3 & 0 \end{pmatrix}, \\
K_6 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & L_6 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
M_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & N_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{70}$$

**Rang 7 (principaux) :**  $\pm F_7, \pm G_7, \pm H_7, \pm K_7, \pm L_7, \pm M_7$ , avec

$$\begin{aligned}
F_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & G_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
H_7 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & K_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (71) \\
L_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & M_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### A3 Types géométriques maximaux indécomposables

Afin de compléter l'énoncé du théorème 1.3 de l'introduction, nous explicitons ici les types géométriques maximaux non scindés en rang  $\leq 7$ , autres que les types symplectiques ou orthogonaux. On rappelle que  $\mathfrak{S}_g, V_{p,q}, V_{2,2}^{\text{II}}$  et  $W_{p,q}$  sont définis par (35), (38), (50) et (43) (voir aussi (45) pour  $W_{1,1}$ ).

#### Rang 5

$$V_{I_1 F_4} = P \cdot (V_{2,1} \oplus \mathfrak{S}_1) \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(voir également (55)).

#### Rang 6

$$V_{I_2 F_4} = P \cdot (V_{3,1} \oplus \mathfrak{S}_1), \quad V_{I_{1,1} F_4} = P \cdot (V_{2,2} \oplus \mathfrak{S}_1), \quad V_{U_2 F_4} = Q \cdot (V_{2,2}^{\text{II}} \oplus \mathfrak{S}_1),$$

avec

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Rang 7

$$\begin{aligned} V_{I_3 F_4} &= P_1 \cdot (V_{4,1} \oplus \mathfrak{S}_1), & V_{I_{2,1} F_4} &= P_1 \cdot (V_{3,2} \oplus \mathfrak{S}_1), \\ V_{I_1 J_2 F_4} &= P_2 \cdot (V_{2,1} \oplus \mathfrak{S}_2), & V_{I_1 G_3 G_3^-} &= P_3 \cdot (V_{2,1} \oplus W_{1,1}), \\ V_{K_4 G_3} &= P_4 \cdot (\{I_1\} \oplus W_{2,1}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, & P_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ P_3 &= \frac{1}{2^{7/4}} \begin{pmatrix} 2^{7/4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{5/4} & 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2^{5/4} & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \\ P_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -2^{1/4} & 2^{1/4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{5/4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{5/4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{72}$$

## Bibliographie

- [ACH65] ANKENY N. C., CHOWLA S. & HASSE H. On the class-number of the maximal real subfield of a cyclotomic field. *J. Reine Angew. Math.* **217** (1965), 217–220.
- [Bav97] BAVARD C. Systole et invariant d’Hermite. *J. reine angew. Math.* **482** (1997), 93–120.
- [Bav01] BAVARD C. Familles hyperboliques de réseaux symplectiques. *Math. Ann.* **320**, 4 (2001), 799–833.
- [Bav05] BAVARD C. Théorie de Voronoï géométrique. Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues. *Bull. Soc. Math. Fr.* **133**, 2 (2005), 205–257.
- [Bav07] BAVARD C. Invariant d’Hermite isotrope et densité des réseaux orthogonaux lorentziens. *Comment. Math. Helv.* **82**, 1 (2007), 39–60.
- [BM95] BERGÉ A.-M. & MARTINET J. Densité dans des familles de réseaux. Application aux réseaux isoduaux. *Enseign. Math. (2)* **41**, 3–4 (1995), 335–365.
- [Bor69] BOREL A. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Hermann, Paris, 1969. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1341.

- [Bou59] BOURBAKI N. *Éléments de mathématique. Première partie. Livre II : Algèbre. Chapitre 9 : Formes sesquilinéaires et formes quadratiques.* Actualités Sci. Ind. n° 1272. Hermann, Paris, 1959.
- [BS94] BUSER P. & SARNAK P. On the period matrix of a Riemann surface of large genus. *Invent. Math.* **117**, 1 (1994), 27–56. With an appendix by J. H. Conway and N. J. A. Sloane.
- [Bue89] BUELL D. A. *Binary quadratic forms.* Springer-Verlag, New York, 1989. Classical theory and modern computations.
- [CR81] CURTIS C. W. & REINER I. *Methods of representation theory. Vol. I.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1981. With applications to finite groups and orders, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.
- [CS92] CONWAY J. H. & SLOANE N. J. A. Low-dimensional lattices. VI. Voronoï reduction of three-dimensional lattices. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **436**, 1896 (1992), 55–68.
- [CS94] CONWAY J. H. & SLOANE N. J. A. On lattices equivalent to their duals. *J. Number Theory* **48**, 3 (1994), 373–382.
- [CS99] CONWAY J. H. & SLOANE N. J. A. *Sphere packings, lattices and groups*, third ed. Springer-Verlag, New York, 1999. With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov.
- [KZ72] KORKINE A. & ZOLOTAREFF G. Sur les formes quadratiques positives quaternaires. *Math. Ann.* **5** (1872), 581–583.
- [KZ77] KORKINE A. & ZOLOTAREFF G. Sur les formes quadratiques positives. *Math. Ann.* **11** (1877), 242–292.
- [Lan94] LANG S. *Algebraic number theory*, second ed., vol. **110** of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [QZ98] QUINE J. R. & ZHANG P. L. Extremal symplectic lattices. *Israel J. Math.* **108** (1998), 237–251.
- [Roï60] ROÏTER A. V. On the representations of the cyclic group of fourth order by integral matrices. *Vestnik Leningrad. Univ.* **15**, 19 (1960), 65–74.
- [Ser70] SERRE J.-P. *Cours d'arithmétique.* Presses Universitaires de France, Paris, 1970. Collection SUP : “Le Mathématicien”, 2.
- [Vai28] VAIDYANATHASWAMY R. On the possible periods of integer-matrices. *Journal L. M. S.* **3** (1928), 268–272.
- [Vin72] VINBERG È. B. On groups of units of certain quadratic forms. *Math. USSR-Sb.* **16**, 1 (1972), 17–35.
- [Was97] WASHINGTON L. C. *Introduction to cyclotomic fields*, second ed., vol. **83** of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

Institut de Mathématiques de Bordeaux  
 U.M.R. 5251 C.N.R.S.  
 Université Bordeaux  
 351, cours de la Libération  
 F-33405 TALENCE Cedex